Emil P. Valentinus Hänsch
Can. reg. in Wegaw 1794.

Math. f. 139

Mathesis. Geometria applicata. 445.

R

Johann Georg Prändels
öffentlichen Repetitors der Mathematik auf dem churfürstl. Schulhause zu München

Geometrie
und
ebene
Trigonometrie
nebst
ihrer Ausübung auf dem Felde.

Mit 9 Kupfertafeln.

München, 1793.
Bey Joseph Lentner.

Nro 1312.

Geometrie und ebene Trigonometrie ꝛc.

Von Joh. Georg Prändl, Repetitor.

Imprimatur.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

München im churfürstl. Bücher-
chercensur-Collegium, den
10ten April 1793.

Regiſtr. Fol. 172.

F. X. Graff,
wirkl. Rath und Sek.

Vorrede.

Eine Art von Kommentär über Geometrien einiger schwerer Lehrbücher, den ich sowohl bey öffentlicher, als Privatunterweisung durch die acht Jahre in Nebenscripten nach und nach zu entwerfen genöthigt war, sind die ursprüngliche Veranlassung zu gegenwärtigem Werkchen. Erst enthielten diese Scripten blos **Erläuterungen** etwas zu unvollständiger Begriffe, beyläufig wie Seite 6. §. 20. vom Maase der Winkel, und beträchtliche **Abkürzungen** der Beweisarten, z. B. §. 155 oder §. 44 Trig. Zuweilen wurden auch Lücken ausgefüllt, als wie §. 60 der Uebergang zur Lehre von Parallellinien, oder §. 98 von Winkeln innerhalb der Peripherie zum Gegensatze der Winkel außer derselben. Es wurden auch merkliche Zusätze eingerückt, und, um die Sache für Anfänger weniger trocken zu machen, so manche praktische Anwendung untergestreut. Oft glückte es mir auch, die Lehrsätze präciser, oder wenigst mit mehr Bestimmtheit vorzutragen Zum Beweise mag §. 213 der Satz von der Quadra-

tur

tur des mondenförmigen Zirkelausschnitts, des Hippokrates dienen. Das System erhielt nebenher auch hie und da beßere Ordnung. So z. B. sehe ich nicht ein, warum Klemm den Lehrsatz, daß die vier Winkel in jedem Trapetze 360° halten, sammt dessen Zusatz mitten in die Figurenwandlung hineinstellt: oder daß der Satz von der Gleichheit der Produkte aus den Sehnensegmenten, nicht mit zur Lehre des Zirkels gehören soll. Endlich bemühte ich mich, so viel möglich, bey den Auflösungen und Beweisen die Verfahrungsart mit Worten, und nicht so fast mit Buchstaben auszudrücken; damit sowohl mehr mathematische Sprache als Allgemeinheit dadurch erzielt würde. Was die Beweise betrift, so wollte ich lieber mit einigen den algebraischen als den sonst beliebten geometrischen Zuschnitt dazu wählen. Der Jüngling, scheint es mir, gewinnt dabey den Vortheil, daß er die kettenartige Verbindung derselben leichter und eher zu überblicken in Stand gesetzt wird, als durch die geometrische Form des Karstens, Kästners u. a. wo sich bey Anfängern, wenn sie nicht sehr wohl in der dialektischen Syllogistik bewandert sind, leicht Fehlschlüße einzuschleichen pflegen. Indeß habe ich jene nicht hintangesetzt, und wo die Sache

dadurch thunlicher schien, sie ebenfalls zu benutzen gesucht. Am Ende hielt ich es auch für gut, nach Prof. Feders und Anderer Beyspiel, eine kleine Geschichte der Geometrie anzuhängen. Ich schöpfte hier vorzüglich aus dem ersten Theil der **Nachrichten von dem Leben und den Erfindungen der berühmtesten Mathematiker. Münster 1788**; wo sich freylich in Vergleichung mit Klemms u. a. Geschichte hie und da, vorzüglich in Rücksicht der Zeitrechnung, Widersprüche vorfinden, welchem Fehler zuweilen auch interessantere Geschichten unterworfen sind. Kurz, die Scripten faßten nach einer kleinen Bearbeitung ein ziemlich vollständiges Ganzes in sich. Sie erhielten allen Beyfall, sowohl von Seite meiner Schüler, als der hier öffentlich aufgestellten Lehrer. Ich wagte es daher, vorzüglich auf wiederholtes Zureden des hiesigen verdienstvollen gelehrten Herrn Professors der Physik, und würdigen Mitgliedes der churfürsti. Akademie P. Max. Imhofs, meine geringe Arbeit den unpartheyischen Augen des Publikums vorzulegen. Enthält dieß Werk gleich nicht viel Neues; so wird man doch darinn durchgehends sehen, daß nirgend das mindeste Plagium begangen worden: sondern daß der Verfasser, um so deutlich seyn zu können, sowohl das

System

Vorrede.

System selbst, als die kleinsten hineingehörigen Theile vorher wohl einstudiert und verdauet haben müsse. Sollte dasselbe auch keine sonderlichen Verdienste haben, so gilt es nichts destoweniger als ein Beweis von der großen Neigung eines Mannes zur Mathematik, der sie ganz ohne allen Lehrer studierte; dem es doch von jeher an Aufmunterung, an Unterstützung gefehlt, und der vielleicht seinem Vaterlande Nutzen schaffen würde, wenn ihn die Gunst des Schicksals auf den gehörigen Posten stellte.

Schriebs

München den 9ten Aprils 1793.

Der Verfasser.

Ueber-

Ueberblick
der vornehmsten abgehandelten Theilen dieses Werkes.

Seite

Allgemeine Vorbegriffe der Geometrie 1

Nöthigste Bestimmungen des Zirkels, seiner Theile, der Winkel und Flächenfiguren 3

Grundbestimmungen der geradlinichten Dreyecke sammt ihrer allerersten Anwendung 9

Weitere Bestimmungen der Winkel, von Parallellinien und ihrer nächsten Anwendung 16

Figurenwandlung 39

Figurenberechnung 52

Aehnlichkeit der Figuren, und ihre Verhältniße zu einander 58

Vom Zirkel 69

Stereometrie 98

Körperwandlung 118

Ebene Trigonometrie 124

Berechnung der Dreyecke 138

Erste Klasse dieser Berechnungen, wo eine Seite und zween Winkel gegeben sind 139

Zweyte Klasse, wenn zwo Seiten und ein Winkel gegeben ist 141

Dritte

Seite

Dritte Klasse, wenn aus den Seiten die Winkel bestimmt werden sollen 145

Anwendung der Trigonometrie auf Polygone und Zirkelabschnitte 148

Von Erfindung der Sinusse n facher Bögen, als ein Anhang zur ebnen Trigonometrie 151

Praktische Geometrie. Vorbegriffe 161

Von Weitenmessungen 164

Von Höhenmessungen, und zwar erstens . . .

durch Hilfe zweener Stäbe . . . 174

Durch den Schatten 175

Durch den Körperfall 177

Durch Hilfe des Barometers 180

Von Aufnehmung der Gegenden 186

Ueber die Reduzierung der in verschiednen Ländern üblichen Schuhen oder Füßen 189

Etwas zur Geschichte der Geometrie 193

Geo-

Geometrie.

Allgemeine Vorbegriffe.

§. 1. Erklärung.

Die Geometrie ist die Wissenschaft der Grösſen, in so ferne man dabey nur auf ihre Ausdehnung sieht.

§. 2. **Erkl.** Ausdehnung blos nach Länge sind Linien: Ausdehnungen nach Länge und Breite sind Flächen; und Ausdehnungen nach Länge, Breite, und Tiefe oder Höhe, sind endlich Körper.

§. 3. **Zusatz.** Die Gegenstände der Geometrie sind demnach Linien, Flächen und Körper.

§. 4. **Erkl.** Ein mathematischer Punkt ist die Gränze einer Linie, und dem zufolge ist auch eine solche Linie nichts anders als die Gränze einer Fläche, und eine solche Fläche die Gränze eines Körpers.

§. 5. **Anmerk.** In einem minder strengen Sinne läßt sich auch sagen, daß die Linie eine Reihe von Punkten, die Fläche eine Reihe von Linien, und der Körper eine Reihe von Flächen sey.

§. 6. **Erkl.** Eine gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zween Punkten Fig. 1 Nro I: jeder andere Weg ist eine krume Linie, voraus gesetzt, daß kein Theil des Weges gerade gehe Nro II. — Oder eine gerade Linie ist jene, deren Theile sämtlich einerley Richtung haben. Im wiedrigen Falle, wo kein Theil des andern Richtung beybehält, eine krume Linie.

§. 7. **Anmerk.** Man könnte noch eine dritte Gattung von Linien annehmen, deren Theile nämlich bald gerad, bald krum sind, und selbe zusammgesetzt oder gemischt nennen. Sie wird in der Natur am häufigsten angetroffen. Z. B. Das Ufer eines Flußes, das zickzacke Schlängeln des Blitzstrahls, der Sprung durch eine Glasplatte oder ein Porzellanteller, die Bahn eines geschwungnen Körpers, die Marmoradern: überhaupt fast alle Umrisse der thierischen Körper und Pflanzen; vorzüglich eines Laubbaumes u. s. f.

§. 8. **Willkührl. Satz.** Das Maas der geraden Linien sind Ruthen, Schuhe, Zolle, Linien. Eine Ruthe wird zu 10 Schuh, ein Schuh zu 10 Zoll u. s. f. angenommen. Man bezeichnet die Ruthen durch (°); die Schuhe durch (′), die Zolle durch (″) und s. f. Z. B. 18°, 7′, 9″, 3‴.

§. 9. **Zusatz.** Krume Linien ist man daher nicht eher zu messen im Stande, als bis sie zuvor, wenn es möglich, in gerade verwandelt worden sind.

§. 10.

§. 10. Erkl. Jener Theil der Geometrie nun, der sich mit geraden Linien, und außerdem noch mit dem Kreise, samt den damit verwandten Flächen und Körpern beschäftigt, macht die Elementargeometrie aus: die übrigen nach Gesetzen beschriebnen krumen Linien samt ihren Abstämmlingen der Flächen und Körper gehören in das Gebiet der höhern Geometrie.

Nöthigste Bestimmungen des Zirkels, seiner Theile, der Winkel und Flächenfiguren.

§. 11. Erkl. Ein Zirkel (Kreis) entstehet, wenn eine gerade Linie sich um einen festen Punkt ganz herum bewegt. Der feste Punkt ist der Mittelpunkt (*Centrum*) Die gerade herum bewegte Linie ist der Strahl (*Radius*) Die beschriebne krume Linie, die Zirkellinie (*Peripheria*) Jede gerade Linie von einem Punkt der Peripherie zum andern, eine Sehne (*Chorda*) Jede durch den Mittelpunkt gehende Sehne ein Durchmesser (*Diameter*) Jede den Zirkel berührende Linie, Tangente (*Tangens*) Was immer für ein Theil der Peripherie, Bogen (*Arcus*) Ein Theil der Zirkelfläche zwischen einem Bogen und der dazu gehörigen Sehne, Abschnitt (*Segmentum*) zwischen zween Radiussen und dem Bogen, Ausschnitt (*Sektor*). So ist z. B. Fig. 2 das c der Mittelpunkt. c d der Radius a d b h p die Peripherie. p h eine Sehne. a b der Diameter. f g oder q k eine Tangente. d b oder b h oder a p ein Bogen. p l h m ein Abschnitt. d c b ein Ausschnitt.

§. 12. Willk. Satz. Jede Peripherie denkt man sich in 360 gleiche Theile getheilet, die man

Grade nennt, weil sich diese Zahl durch die meisten Faktoren dividieren läßt. Der Grad wird wieder untergetheilt in 60 Minuten, dieser in 60 Sekunden u. s. f. Man bezeichnet sie gleichfalls, wie oben, mit (°) (′) (″) u. s. f. Z. B. 76°, 15′, 29″. Die obwaltenden Umstände werden allemal den Ausschlag geben, ob diese Zeichen von Linien oder Zirkelbögen zu verstehen seyen.

§. 13. **Lehrsatz.** Alle geraden Linien eines Zirkels vom Mittelpunkte bis an die Peripherie gezogen, d. i. alle Radiusse ein und des nämlichen Zirkels sind einander gleich.

Beweis.

Was gleiches Maas hat, ist gleich; nun haben alle Radiusse des nämlichen Zirkels die Zeuglinie, oder die Oeffnung des Zirkelinstruments zum Maase; also sind sie einander gleich.

§. 14. **Lehrs** Der Radius gleicht dem halben Diameter. Fig. 2.

Satz.

$$R = \frac{1}{2} D$$

Beweis.

Man beschreibe was immer für einen Zirkel, so ist

$$\left.\begin{array}{l} a\,c = R \\ c\,d = R \end{array}\right\}$$ aus der Definition.

add. $a\,c + c\,d = 2\,R$. Aber in der Figur ist wegen der nämlichen Richtung.

$$a\,c + c\,d = D$$

Folglich $2\,R = D$

:2 $R = \frac{1}{2} D$

§. 15.

§. 15. **Erkl.** Ein ebner **Winkel** ist die **Neigung zwoer geraden Linien in einen Punkt.** Fig. 3 Ist die Neigung **neutral** d. i. neigt sich eine Linie weder mehr hinweg von der andern, als hinzu, so heißt der **Winkel** ein **rechter** und die **Linien** lothrecht oder **perpendikulär** aufeinanderstehend. Neigt sich eine Linie mehr hinzu zu der andern als hinweg so ist der **Winkel** spitzig; — und stumpf, wenn sich die eine mehr hinweg als zur andern hinzu neigt. So ist z. B. o ein rechter, m ein spitziger, und x ein stumpfer **Winkel.**

§. 16. **Zus.** Man sieht ohne mein Erinnern, daß ein spitziger **Winkel** kleiner als ein rechter, und ein stumpfer größer seyn müsse.

§. 17. **Willk. Satz.** Die Bezeichnung eines **Winkels** kann entweder durch einen oder drey Buchstaben geschehen. Im ersten Falle wird er in die **Neigung** hinein geschrieben, und dazu schicken sich stumpfe **Buchstaben,** als m, n, x, o u. s. f. Im zweyten Falle werden sie an die **Endpunkte** der **Linien** geschrieben, und muß jener in die **Mitte** zu stehen kommen, wenn man sie ausspricht oder schreibt, welcher vor die **Neigung** gesetzt wird. Z. B. der **Winkel** a b c oder c b a; aber niemals b a c oder c a b.

§. 18. **Erkl.** Die zwo **Linien,** welche den **Winkel** bestimmen heissen Schenkel, und ihr **Neigungspunkt** — Scheitel.

§. 19. **Zusatz.** Es kömmt bey der Größe eines **Winkels** alles auf die **Neigung** an. Die Länge oder Kürze der Schenkel trägt nichts dazu bey.

§. 20. **Lehrsatz.** Jeder Zirkel besteht aus 4 **rechten Winkeln.**

Satz. Fig. 4.

C = 4 r

Beweis.

Man ziehe in dem Zirkel einen Diameter a b, so kann der Radius d o im Mittelpunkte so aufgerichtet werden, daß er sich weder mehr rechts als links neigt d. i. neutral ist; eben das kann auch mit dem Radius o f auf der Gegenseite bewerkstelliget werden, und daher ist

o = r
m = r
y = r
x = r

o + m + y + x = 4 r. Aber die Neigungen
o + m + y + x = C
also C = 4 r

§. 20. **Zusatz.** Es sind demnach die Bögen aus dem Scheitel des Winkels beschriebner Zirkel das natürlichste Maas eines Winkels. Denn man stelle sich vor, es sey Fig. 5 der Radius d c um c beweglich, so wird, wenn er als Schenkel von d nach a oder nach b rückt, der Bogen d a oder d b in eben dem Verhältnisse abnehmen oder zunehmen, wie die Neigung; weil der Radius bey Erzeugung des Zirkels als Ursache eben so große Wirkung in der Peripherie d. i. in den sämtlichen Bögen hervorbringen mußte, als weit er sich von der ersten Richtung weggeneigt hatte. Nun aber diese Neigung läßt sich als wachsender Winkel betrachten; also ist sie proportionel, und zwar an jeden Orte mit dem Bogen, der ihr entspricht, und kann folglich sein Maas abgeben.

§. 21.

§. 21. **Zusatz.** Weil grosse und kleine Zirkel alle gleich viele Grade haben, so liegt nichts daran, ob aus der Neigung eines Winkels ein grosser oder kleiner Bogen zwischen den Schenkeln beschrieben wird; weil, wie wir schon oben sagten, die Kürze oder Länge der Schenkel gar nichts zur Neigung des Winkels beyträgt. Um wie viel also ein koncentrischer Bogen größer ist als ein anderer, um so viel hat er auch größere Grade. So z. B. Fig. 6 haben a b, f d, h g als koncentrische Bögen alle gleich viele Grade, und ist daher ein jeder das Maaß des Winkels. §. 15.

§. 22. **Lehrsatz.** Jeder rechte Winkel hält 90°

Satz.

r = 90

Beweis.

Erwiesen ist worden, daß §. 20

C = 4 r Aber

C = 360°

Also 4 r = 360

:4 r = 90

§. 23. **Zusatz.** Folglich hält jeder spitzige Winkel weniger als 90° und jeder stumpfe Winkel mehr als 90; weil dieser größer und jener kleiner als ein rechter ist.

§. 24. **Erkl.** Eine Figur ist eine allenthalben begränzte stättige Größe. Eine Flächenfigur nun ist eben, wenn sich von jedem Punkte derselben zum andern eine gerade Linie darauf ziehen läßt; geradlinicht, wenn ihre Gränzen d. i. die Linien gerade sind, und erhält allemal ihren Namen von der Anzahl der Seiten, z. B. Viereck, wenn sie von 4 Seiten eingeschlossen ist u. s. f.

§. 25.

§. 25. Zusatz. Es ist leicht begreiflich, daß zwo gerade Linien unmöglich einen Raum einschliessen können, und daß also das Dreyeck die erste mögliche Flächenfigur seyn müsse.

§. 26. Erkl. Es giebt sechserley Gattungen von Dreyecken. Dreyerley in Rücksicht der Winkel und dreyerley in Rücksicht der Seiten. In Rücksicht der Seiten Fig. 7 giebt es erstens gleichseitige Nro 1, in welchen jede Seite der andern gleich ist. 2tens gleichschenklichte Nro 2, wenn nur zwo Seiten einander gleich sind. 3tens ungleichseitige Nro 3, wo keine Seite der andern gleich ist. In Rücksicht der Winkel Fig. 8 1) rechtwinklichte Nro I, in welchen sich unter die dreyen Winkeln ein rechter befindet. 2) stumpfwinklichte Nro II, wo von den drey Winkeln einer ein stumpfer ist. 3) spitzwinklichte Nro III, wenn alle drey Winkel spitzig sind.

§. 27. Erkl. Von Vierecken giebt es fünferley Gattungen. 1) Quadrate Fig. 9 Nro 1, eine Figur von 4 gleichen Seiten und eben so viel gleichen Winkeln. 2) Rechtecke Nro 2, wo die Winkel zwar alle gleich aber nur zwo und zwo sich entgegen stehende Seiten gleich sind. 3) Rauten Fig. 10 Nro 1, wo zwar alle Seiten, aber nur zween und zween gegen überstehende Winkel gleich sind. Sie heißen auch Rhomboiden. 4) Länglichte Rauten oder Rhomboiden Nro II, wo allemal zwo und zwo entgegen stehende Seiten und auch zween und zween solcher Winkel sich gleich sind. Diese 4 Arten von Vierecken befaßt man auch sonst unter dem Name Parallellogram. 5) Trapezen Nro III, wo keine Seite eben der andern gleich

seyn

seyn darf, oder wo keine der obigen Bestimmungen statt hat.

§. 28. Erkl. Polygone oder Vielecke heißen alle übrigen Figuren, die mehr als 4 Seiten haben. Sind die Seiten und Winkel gleich, wie Fig. 11 Nro 1, so heißen sie regulär; im wiedrigen Falle z. B. Nro 2 irregulär.

Grundbestimmungen der geradlinichten Dreyecke samt ihrer allererſten Anwendung.

§. 29. Grundsatz. Flächen, die sich einander vollkommen decken, sind gleich und ähnlich, d. i. kongruent.

§. 30. Willk. Satz. Das Zeichen der Kongruenz ist $\cong$, und das der bloßen Aehnlichkeit $\sim$

§. 31. Lehrsatz. Durch eine Seite und die zween darauf liegenden Winkel, die aber zusamm genommen kleiner als 180° seyn müssen, läßt sich ein einziges Dreyeck bestimmen. Fig. 12

Beweis.

Denn man verlängere die beyden Seiten so lange in der nämlichen Richtung, bis sie sich durchschneiden, und den dritten Winkel bilden, so wird nur ein einziger Punkt möglich seyn, wo dieser Durchschnitt geschieht. Werden aber die Seiten nicht in der einmal zu Grund gelegten Richtung verlängert, so werden entweder die Winkel verändert, oder die Figur wird mehreckigt, oder auch krumlinicht.

§. 32. Anmerk. Daß die beyden Winkel zusamm nicht 180° halten dürfen, sondern kleiner seyn müssen, kann indeß

indeß aus der Erfahrung gezeigt werden, bis man tiefer unten im Stande seyn wird, es in aller mathematischeu Schärfe zu erhärten.

§. 33. **Zusatz.** Wenn also in Zukunft erwiesen werden kann, daß in zwey oder mehrern Dreyecken diese Bestimmung gleich ist, das heißt, daß eine Seite, und die darauf liegende Winkel in dem einen Dreyecke, einer Seite und den darauf liegendenWinkeln in dem anderenDreyecke gleich sind, so ist auch eben darum erwiesen, daß die Dreyecke selbst kongruent sind, denn die Seite deckt die Seite, und die Winkel die Winkel, also die ganzen Dreyecke.

§. 34. **Lehrsatz.** Zwo Seiten mit dem eingeschloßnen Winkel, bestimmen ebenfalls nur ein Dreyeck. Fig. 13

Beweis.

Denn um die Figur zu begränzen, und die gegebnen Stücke beyzubehalten, muß man gerade da eine Schlußlinie ziehen, wo die beyden Endpunkte der Seiten sind.

§ 35. **Zusatz.** Dreyecke also, wo überall dieß statt findet, sind gleich und ähnlich, weil sie einerley Bestimmung haben.

§. 36. **Lehrsatz.** Drey Seiten bestimmen ebenfalls nur ein Dreyeck. Fig. 14

Beweis.

Man setze die Seitenlinien zusamm wie man will, so wird zwar die Lage aber nie das Dreyeck selbst verändert werden; denn nach gehöriger Wendung decken sie sich allemal wieder.

§. 37. **Zusatz.** Kann nun erwiesen werden, daß in zweyen Dreyecken einerley Seiten sind, so ist auch der Beweis von der Kongruenz der Dreyecke fertig.

§. 38.

§. 38. **Lehrsatz.** In gleichen und ähnlichen oder kongruenten Dreyecken stehen gleichen Winkeln gleiche Seiten; und gleichen Seiten auch gleiche Winkel entgegen.

Beweis.

Weil sich in diesen Dreyecken bey der Aufeinanderlegung alles decken muß, und weil überstehende Seiten und Winkel Ursach und Wirkung von einander sind, so folgt auch daraus, daß Winkel den Winkeln als Ursachen gleicher Wirkungen; und Seiten den Seiten als Wirkungen gleicher Ursachen gleich sind.

§. 39. **Zusatz.** Drey Seiten, deren zwo zusamm genommen nicht größer als die dritte sind, können kein Dreyeck bestimmmen. Denn bey Errichtung derselben fallen sie allemal auf die dritte hinauf, und giebeln sich zu keinem Dreyecke.

§. 40. **Aufgabe.** Einen Winkel in zween gleiche Theile zu theilen. Fig. 15

§. 41. **Anflösung.** Man schneide mit einer beliebigen Zirkelöffnung aus dem Scheitel des Winkels von den Schenkeln 2 gleiche Stücke ab, setze ferner den Zirkel in die Abschnittspunkte ein, mache auswärts in der Mitte mit einer gleichen Oeffnung Bögen, die sich einander durchschneiden, und ziehe dann eine gerade Linie aus dem Scheitel durch den Durchschnittspunkt der Bögen, so ist der Winkel in zween gleiche Theile getheilt.

Satz

o = m

Beweis.

Beweis.

a b = b d
a c = c d
b c = b c
} als gleiche Zirkelöffnungen.

Also △ a b c ≅ △ b c d; weil die Seiten überall einerley nach §. 37., und o = m, weil ihre entgegengesetzten Seiten gleich sind §. 38.

§. 42. **Zusatz.** Daraus ist begreiflich, daß sich jeder Winkel in 2, 4, 8, 16, u. s. f. gleiche Theile theilen läßt. Denn man darf nur jeden Theil wieder in zween gleiche Theile theilen, so erhält man 4 gleiche Theile. Wird das Geschäft wiederhollet, so bekömmt man 8, u. s. w.

§. 43. **Aufgabe.** Eine gerade Linie in zween gleiche Theile zu theilen. Fig. 17 16.

§. 44. **Auflösung.** Man beschreibe unter und über der Linie aus den beyden Endpunkten mit gleicher Zirkelöffnung Bögen, die sich einander durchkreutzen, und ziehe dann durch die beyden Durchkreutzungspunkte eine Linie, so wird dieselbe die gegebne Linie in 2 gleiche Theile theilen.

Satz

a c = c b

Beweis.

Man zeichne die Zirkelöffnungen wirklich aus den Durchschnittspunkten, so ist

a d = d b
a f = f b
} als Radiusse.
d f = d f also

△ a d f ≅ △ d b f; wenn die Linie a b weggedacht wird. Folglich auch

o = n ferners

a d = d b

d c = d c mithin wenn man die beyden Theile von a b wieder gelten läßt

△ a d c ≅ △ d c b; weil überall zwo Seiten und der dazwischen liegende Winkel die nämlichen sind §. 34. daher a c = c b; weil sie gleichen Winkeln entgegen stehen, nämlich dem o und n.

§. 45. **Anmerk.** Eben so leicht wird es nach dieser Methode seyn, eine gerade Linie in 4, 8, 16, u. s. f. Theile zu theilen. Weiter unten soll auch gezeigt werden, wie eine gerade Linie in beliebige gleiche Theile getheilt werden könne, z B. in 3, 5 u. d. gl. welches bey Winkeln so leicht nicht angeht.

§. 46. **Aufgabe. Von was immer für einen Punkt aus, auf eine gerade Linie einen Perpendickel oder lothrechte Linie aufzurichten.** Fig. 18

§. 47. **Auflösung.** Der Fall ist hier dreyfach. Erstens kann der Punkt über oder unter der Linie gegeben seyn; einmal in der Linie selbst, und einmal kann auch einer der Endpunkte eine Lothe verlangen.

Erster Fall. Man setze den Zirkel Nro I in den gegebenen Punkt ein, schneide mit gleicher Oeffnung beyderseits die Linie ab. Setze ferner den Zirkel in die Abschnittspunkte, und beschreibe mehrmals auf der dem Punkte entgegengesetzten Seite Durchschnittsbögen mit gleicher Oeffnung, so wird die von dem gegebnen Punkt auf den Durchschnittspunkt gezogne gerade Linie die gegebne Linie rechtwinklicht durchschneiden, das heißt, man wird den verlangten Perpendikel erhalten. Denn es gilt der

Satz

o = n

Beweis.

Beweis.

Wenn die ersten Radiusse gezeichnet sind, wird
d a = d b seyn
auch a c = c b weil auf diese Weise eine Linie in gleiche Theile getheilt wird. Also
$\triangle$ d a c $\cong$ $\triangle$ d c b folglich
o = n

Zweyter Fall. Man setze den Zirkel Nro II in den Punkt ein, schneide beyderseits gleiche Stücke ab, und beschreibe aus dem Abschnittspunkten mit gleicher Oeffnung des Zirkels ober dem Punkte Bögen, die sich durchkreuzen, so wird die aus dem Durchschnitt auf dem Punkte herabgezogene Linie perpendikulär seyn.

Satz.

o = n

Beweis.

a c = c b
a d = d b
} als Radiusse.
d c = d c also
$\triangle$ a c d $\cong$ c b d und
o = n

Dritter Fall. Man setze den Zirkel Nro III in den Endpunkt ein, schneide von der Linie ein Stück ab, beschreibe auch von der entgegengesetzten Seite einen Bogen mit der nämlichen Oeffnung, nnd verlängere die Linie in ihrer Richtung bis dahin, so wird die übrige Verfahrungsart, so wie der Beweis, wie im zweyten Falle seyn.

§. 48. **Lehrsatz.** In einem gleichschenklichten Dreyeck sind die Winkel an der Grundlinie gleich. Fig. 19

Satz.

o = n

Beweis.

Man theile die Grundlinie in zween gleiche Theile, und ziehe von dem entgegenstehenden Winkel eine Linie auf den Theilungspunkt, so werden zwey gleiche Dreyecke entstehen.

Dem a d = d c als Schenkel
a b = b c der Theilung gemäß
und d b = d b folglich
△ a d b ≡ △ d b c
also o = n

§. 49. **Lehrsatz.** In gleichseitigen Dreyecken sind alle Winkel einander gleich. Fig. 20

Satz.

m = n = x

Beweis.

Man mag zur Basis eine Linie annehmen, welche man will, so wird allemal das Dreyeck als gleichschenklicht, wie oben, betrachtet werden können. Z. B. man nehme a c für die Grundlinie an, so sind b a und b c die gleichen Schenkel, und eben darum n = x. Nimmt man a b, so ist n = m folglich
m = x = n

§. 50.

§. 50. **Anmerk.** Wollte man den Beweis ordentlich führen, ohne den obigen vorauszusetzen, so dörften nur ein Paar Grundlinien in zwenn gleiche Theile zerflückt, und wie oben verfahren werden.

Weitere Bestimmungen der Winkel, von Parallellinien und ihrer nächsten Anwendung.

§. 51. **Erkl.** Wenn zween oder mehr Winkel auf einer geraden Linie liegen, und aus einem Punkte gezogen sind, so heißen sie Nebenwinkel. Fig 21 Und wenn die Schenkel eines Winkels rückwärts verlängert werden, so entstehen Vertikalwinkel. Fig. 22. Nro I Nebenwinkel z. B. sind o und m oder x, y und z. Vertikalwinkel aber sind o und m oder auch x und y; weil, wenn man x oder y für den ursprünglichen Winkel annimmt, bey der rückwärtigen Verlängerung der Schenkel, der andere nothwendig entstehen muß.

§. 52. **Lehrsatz.** Alle Nebenwinkel sind zusamm genommen 180° gleich. Fig. 22 Nro II

Satz.

$$x + y + n = 180°$$

Beweis.

Man ziehe aus dem gemeinschaftlichen Punkt einen halben Zirkel durch die Schenkel, so ist

$$x = a\,b$$
$$y = b\,c$$
$$n = c\,d$$

$$x + y + n = a\,b + b\,c + c\,d$$
$$a\,b + b\,c + c\,d = \frac{360°}{2} = 180$$

$$x + y + n = 180°$$

§. 53.

§. 53. **Lehrsatz.** Alle Winkel um einen Punkt herum halten zusamm 360°. Fig. 23

Satz.

$o + m + n + x = 360°$

Beweis.

Denn man beschreibe aus ihrem Zusammenstoßungspunkt einen Zirkel, und läßt die Schenkel die Peripherie durchschneiden, so haben sie zum sämmtlichen Maase den ganzen Zirkel, das ist 360°.

§. 54. **Anmerk.** Algebraisch wird die Sache sinnlicher; denn es gelte der obige Satz, so ist der Beweis

$o = a\,b$
$m = b\,c$
$n = c\,d$
$x = d\,a$

$o + m + n + x = a\,b + b\,c + c\,d + d\,a$

Nun ist auch $360° = a\,b + b\,c + c\,d + d\,a$, als

Folgl. $o + m + n + x = 360°$. der ganze Zirkel.

§. 55. **Lehrsatz.** Zween und zween Vertikalwinkel sind einander gleich. Fig. 22 Nro I

Sätze.

1) $o = m$ 2) $x = y$

Beweise.

1) $o + x = 180°$
$x + m = 180°$ } als Nebenw.

$o + x = x + m$
$-x = -x$

$o = m.$

2)

2) $x + m = 180$
$m + y = 180$
$x + m = m + y$
$-m = -m$
$x = y.$

Oder auch so

$x + o = 180$
$o + y = 180$
$x + o = o + y$
$-o = -o$
$x = y$

§. 56. Zusatz. Wenn nun von 4 Vertikalwinkeln einer gegeben ist, so sind alle gegeben. Denn es halte z. B. $x = 100°$; also auch $y = 100$. Weil aber alle Winkel um einen Punkt herum 360° halten, so ist:

$100 + m + 100 + o$ *) $= 360.$
Aber $m = o$ folglich
subst. $100 + m + 100 + m = 360$
abgek. $200 + 2m = 360$
$-200 = -200$
$2m = 160$
:2 $m = \frac{160}{2} = 80$

Und da $m = o$ ist
sohin ist auch $o = 80°$

§. 57.

*) Hier muß der Buchstabe o nicht mit Null verwechselt werden.

§. 57. **Lehrsatz.** In einem jeden geradlinichten Dreyecke halten immer zween Winkel weniger als 180°. Fig. 24.

Beweis.

Weil dieß bey spitzwinklichten Dreyecken ohnehin schon klar ist; indem zween Winkel, deren keiner 90° hält, nicht miteinander 180°, das ist zweymal 90° geben können, so darf der Beweis blos für die stumpfwinklichten Dreyecke geführet werden, und zum Ueberfluße auch für rechtwinklichte; um zu zeigen, daß zween rechte Winkel in keinem Dreyecke Platz haben.

Man theile demnach jene Seite, wo die gegebnen Winkel anliegen, in zween gleiche Theile, dann ziehe man aus dem Scheitel des dritten Winkels eine gerade Linie bis an den Theilungspunkt, verlängere sie ausserhalb im nämlichen Maase und Richtung, schließe durch eine dritte gerade Linie noch ein Dreyeck, wo man will, und verlängere jene Seite des ersten Dreyecks, wo zween Winkel darauf zusamm stossen, so wird der Beweis für ein Paar Winkel allgemein seyn.

Satz.

$$x + y < 180°$$

Beweis.

$$\left.\begin{array}{l} af = fc \\ bf = fd \end{array}\right\} \text{ aus der Konstruktion}$$

$$o = m \quad \text{als Vertikalw.}$$

$$\text{Also } \triangle afb \cong \triangle fdc; \text{ folglich}$$

$$x = s$$

Aber $y + s < y + s + r$

Da nun $y + s + r = 180°$

Also $y + s < 180°$, und weil $x = s$

substit. $y + x < 180°$

§. 58. **Anmerk.** Läßt man nun einen von den gegebenen Winkeln weg und nimmt den dritten dazu, so wird der Beweis der vorige seyn. Ich will ihn, wegen der verkehrten Lage der Figur ganz hieher setzen. Fig. 25

Satz.

$x + y < 180°$

Beweis.

$af = cf$

$bf = fd$

$o = m$

Also $\triangle abf \cong \triangle fcd$ und

$x = s.$

Aber $s + y < s + y + r$

$s + y + r = 180$

Folglich $s + y < 180°$

substit. $x + y < 180°$

§. 59. **Zusatz.** Weil die Bildung eines Dreyecks eine Zusammenstoßung zwoer Linien über einer dritten voraussetzt, so können die Schenkel zweener an die Endpunkte einer Linie gesetzter Winkel, die miteinander nicht kleiner als 180° sind, nie zusammenstossen oder konvergieren.

§. 60. **Lehrsatz.** Wenn zween an die Endpunkte einer Linie gesetzte Winkel miteinander größer als 180° sind, so werden sie rückwärts verlängert konvergieren, und also dießseits divergieren; denn die Winkel jenseits sind kleiner als 180°. Fig. 26.

Satz.

$o + x < 180°$

Beweis.

Es sey $y + m$ um p größer als $180°$; oder der Ueberschuß der beyden Winkel heiße p.

Nun ist $y + o = 180$ } als Nebenw.
$m + x = 180$ }

add. $y + m + o + x = 360°$
subt. $y + m = 180° + p$

$o + x = 180° - p$
Folglich $o + x < 180°$

§. 61. **Erkl.** Linien, welche, wenn man sie auch auf beyden Seiten unendlich verlängert, weder konvergieren noch divergieren, heissen Parallellinien.

§. 62. **Lehrsatz.** Wenn zwo Linien von einer dritten so durchschnitten werden können, daß

I die beyden innern Winkel zusamm $180°$ halten;

II oder die Wechselwinkel gleich sind; das heißt, jene Winkel, welche oben und unten, dießseits und jenseits, zwischen den durchschnittenen Linien liegen;

III oder auch, daß ein äußerer Winkel dem innern entgegengesetzten gleich wird:

So läßt sich in jedem Falle erweisen, daß die Linien parallel sind. Fig. 27. Nro I

Erste Vorausſetzung.

$x + y = 180$

Satz.

a b und b c parallel

Beweis.

x und y ſind zuſamm nicht kleiner als 180°; alſo können nach §. 59. a b und b c nicht konvergieren. x und y ſind nicht größer als 180; alſo können ſie nach §. 60. nicht divergieren. Linien aber die nicht konvergieren und nicht divergieren, ſind parallel: alſo ſind a b und b c parallel.

Zwote Vorausſetzung.

$x = n$

Satz.

a b und b c parallel

Beweis.

$y + n = 180°$

Aber $x = n$, wie vorausgeſetzt iſt.

ſubſtit. $y + x = 180$. Alſo dem vorigen gemäß, a b mit b c parallel.

Dritte Vorausſetzung.

$m = n$

Satz.

a b und b c parallel

Beweis.

Beweis.

$m + z = 180°$

Aber $m = n$, gemäß der Voraussetzung.

Subst. $n + z = 180°$

Also wiederum, dem oben erwiesenen Satze zufolge, a b mit b c parallel; weil die innern Winkel 180° halten.

§. 63. **Lehrsatz.** Alles obige von Parallellinien läßt sich auch umgekehrt erweisen: das heißt, wenn vorausgesetzt wird, daß zwo Parallellinien von einer dritten Linie durchschnitten werden, so halten

I. die innern Winkel 180;

II. die Wechselwinkel sind gleich;

III. der äußere Winkel ist dem innern entgegengesetzten gleich.

Voraussetzung für alle drey Sätze.

a b mit b c parallel.

Erster Satz.

$x + y = 180°$

Beweis.

a b und b c konvergieren nicht; also haben die anliegenden Winkel auch nicht weniger, als 180°.

a b und b c divergieren nicht; also haben sie auch nicht mehr als 180 §§. 59. 60.

folglich $x + y = 180°$

Zweyter Satz.

x = n

Beweis.

x + y = 180; wie oben erwiesen worden.
y + n = 180

Also x + y = y + n
− y = − y

x = n

Dritter Satz.

m = n

Beweis.

z + n = 180
m + z = 180

Folglich m + z = z + n
− z = − z

Sohin m = n

§. 64. **Zusatz.** Wenn mehrere Linien mit einander parallel gezogen werden Fig. 27 Nro II, so halten, was immer für zween innere Winkel, die zusamm gehören, 180°: was immer für zween Wechselwinkel sind gleich; und jeder äußere Winkel beträgt so viel als einer von seinen entgegengesetzten innern Winkel. Denn, weil die Linien unter sich parallel sind, so ist eben darum jede mit der andern parallel, und dann gilt wieder das obig erwiesene. So ist z. B. x + m = 180, weil a b mit f g parallel ist: ebenfalls o = n und x = n.

§. 65.

§. 65. Zusatz. Wenn eine von den Parallellinien unter einen rechten Winkel geschnitten wird, so wird es auch, falls die schneidende Linie verlängert ist, eben so gut die andere seyn. Oder, wenn einer von den innern Winkeln ein rechter ist, so läßt sich dieß auch von dem andern behaupten; denn 90 + 90 = 180°.

§. 66. Lehrsatz. Parallellinien zwischen Parallinien, in so fern sie abgeschnitten werden, sind gleich. Fig. 28

Satz.

1) a b = d c. 2) a d = b c

Beweis.

Man ziehe von einem der vier Winkel zum gegenüberstehenden durch die begränzte Figur eine Linie; wir wollen selbe in der Folge etymologisch Diagonallinie nennen. So ist

a c = a c

$$\left.\begin{array}{l} x = y \\ z = n \end{array}\right\} \text{ als Wechselw.}$$

folglich △ a d c $\overline{\underline{\simeq}}$ △ a b c. Nun steht dem x das d c und dem y das a b entgegen. Also a b = d c, und eben so a d = b c

§. 67. Lehrsatz. Wenn in einem Vierecke zwo und zwo überstehende Seiten gleich sind, so müssen sie auch eben darum parallel seyn. Fig. 29

Voraussetzung.

a b = d c und a d = b c

Satz.

Satz.

a b parallel mit d c und
a d parallel mit b c

Beweis.

Man ziehe eine Diagonal so ist

a c = a c
a b = d c } nach der Voraussezung
b c = a d }
also △ a b c ≡ △ a d c und
m = y } als Winkel die gleichen Seiten entgegen stehen. §. 38.
o = x }

Weil dieß aber zugleich Wechselwinkel sind, so ist

a b paral. mit d c und
a d mit b c

§. 68. **Zusatz.** Alle Perpendikel zwischen zwo Parallellinien sind gleich. Denn zween und zween Perpendikel sind immer unter sich parallel, weil die innern Winkel $90° + 90° = 180$. §. 15. Nun aber sind Paralleln zwischen Paralleln gleich; also gilt dieß eben darum auch von Perpendikeln zwischen Paralleln. Ueberhaupt ist ein solcher Perpendikel das Maas der Parallelweite; da aber diese Weite überall sich selbst gleich ist, so müßen auch ihre Maase gleich seyn.

§. 69. **Lehrsatz.** Wenn in einem Parallelogram ein rechter Winkel ist, so sind alle vier Winkel rechte Winkel. Fig. 30.

Voraussetzung.

Z. B. $m = 90°$

Satze.

1) $x = 90°$. 2) $n = 90$. 3) $o = 90°$.

Beweis.

1) $m + x = 180°$ als innere Winkel.
Aber $\underline{_m \quad = _90°}$
Also $x = 90°$

2) $x + n = 180°$ aus obigem Grunde,
Aber $\underline{_x \quad = _90°}$ wie erwiesen worden
folglich $n = 90$

3) $n + o = 180$ wie oben
Aber $\underline{_n \quad = _90}$ wie erwiesen worden.
Also $o = 90$

§. 70. **Lehrsatz.** Alle Winkel in einem Dreyecke machen zusammen 180°. Fig. 31

Satz.

$$o + x + m = 180°$$

Beweis.

Man ziehe mit einer Seite durch den Scheitelpunkt des entgegenstehenden Winkels eine Parallellinie, so erhält man Wechselwinkel: da nun

$$o + n + s = 180$$

und $n = x$, dann $s = m$, so läßt sich substituieren, und es wird aus der Gleichung

$$o + x + m = 180°$$

§. 71. **Zusatz.** Es können demnach in einem Dreyecke weder zween stumpfe noch zween rechte Winkel seyn; weil diese zween Winkel im ersten Falle mehr als 180° und im zweyten Falle völlige 180° hielten, und demnach für den dritten Winkel nichts mehr übrig bliebe.

§. 72. **Zusatz.** In gleichseitigen Dreyecken beträgt ein Winkel 60°; denn die Winkel sind in solchen Dreyecken gleich §. 49; folglich hält einer $\frac{180}{3} = 60°$.

§. 73. **Zusatz.** In rechtwinklichten Dreyecken mißt ein Winkel an der größten Seite 45°; denn man kann sich dieselbe als die Basis oder Grundlinie vorstellen; da nun die Winkel in gleichschenklichten Dreyecken an der Basis gleich sind §. 48, und sie hier miteinander 90° halten, so trift für einen 45°, das ist $\frac{90}{2} = 45°$. Durch Algebra fällt der Beweis mehr in die Augen.

Sätze. Fig. 32

1) $y = 45°$

2) $z = 45°$

Beweis.

$$x + y + z = 180°$$
$$- \quad x \qquad = _90°$$
$$y + z = 90°$$

Aber $y = z$ und subst.

I Subst. $y + y = 90°$

$$2y = 90°$$

$$:2 \qquad y = \frac{90}{2} = 45°$$

II Sub-

II Subſtit. $z + z = 90°$

$2z = 90°$

$:2 \qquad z = \frac{90°}{2} = 45°$

§. 74. **Zuſatz.** In gleichſchenklichten Dreyecken überhaupt ſind alle drey Winkel inſonderheit gegeben, wenn einer gegeben iſt; denn iſt der an der Spitze gegeben, ſo bleiben für die übrigen beyden an der Grundlinie der Reſt von 180°, oder nach der Sprache der Geometer das Komplement zu 180°, folglich für einen derſelben die Hälfte dieſes Komplements, weil beyde gleich groß ſind. Iſt ein Winkel an der Grundlinie gegeben, ſo iſt auch eben darum ſein Nachbar an der Grundlinie bekannt, weil er gleich viele Grade hält. Für den dritten Winkel am Scheitel bleibt das Komplement von den erſten beyden zu 180°. Fig. 8 Nro II Algebraiſch geht die Operation ſo vor ſich. Setze man erſtens, es halte der Scheitelwinkel $o = 28°$ ſo iſt 7.

$o + x + y = 180$

$\underline{\quad o \quad\quad 28}$

$x + y = 152$

Aber $x = y$ folglich ſubſtit.

$x + x = 152$ und $y + y = 152°$

Abgekürzt $2x = 152$ und $2y = 152$

div. durch 2 $x = 76$ und $y = 76$

Setze man zweytens, es ſey ein Winkel an der Grundlinie bekannt. Es halte z. B. Fig. 7 Nro III

$x = 34°$;

folglich auch der andere Winkel $m = 34°$

Nun iſt $x + m + y = 180$

$\underline{-x \qquad\quad = -34}$

$m + y = 146$

Aber auch $\underline{-m \qquad = -34}$

folglich $y = 112°$ §. 75.

§. 75. **Zusatz.** Wenn in ungleichseitigen Dreyecken zween Winkel zusamm bekannt sind, so ist auch der dritte als das Komplement zu 180° bekannt.

§. 76. **Lehrsatz.** Alle vier Winkel in einem Vierecke, es mag ein Parallellogram oder ein Trapez seyn, machen zusamm 360°. Fig. 33

Satz.

$$a + b + c + d = 360°$$

Beweis.

Man ziehe, wo man will, eine Diagonal, so zerfällt die Figur in zwo Dreyecke, wo die Winkel überall 180° machen, folglich in beyden 360° seyn müssen. Denn

$$a + m + x = 180$$
$$y + c + z = 180$$

$$a + y + m + c + x + z = 360$$

Aber $y + m = b$ } Denn die Theile zusamm
und $x + z = d$ } genommen geben das Ganze.

Also subst. $a + b + c + d = 360°$

§. 77. **Zusatz.** Da sich das Viereck durch eine Diagonal in zwo Dreyecke, das Fünfeck Fig. 34 in 3 Dreyecke, das Sechseck in 4 Dreyecke, u. s. f. zerfällen läßt, vorausgesetzt, daß sich die Diagonalen nicht durchkreutzen, so kann man den Inhalt aller Winkel in einem Polygone, es mag regulär oder irregulär seyn, leicht bestimmen: weil man weis, daß sich jedes Polygon in so viel Dreyecke zerfällen läßt, als es Ecke oder Seiten hat, weniger zwey: Folglich darf nur die Anzahl der Dreyecke mit 180° multipli-

ciert

ciert werden. Z. B. bey einen Sieben eck Fig. 35 ist die Anzahl der Dreyecke $7 - 2 = 5$; und demnach der Inhalt aller Winkel $180 \times 5 = 900°$. Wenn also allgemein n die Anzahl der Ecke in einen Polygon ausdrückt, so ist $180 \times (n - 2)$ der Winkelinhalt jedes Polygones.

§. 78. **Lehrsatz.** Jeder äußere Winkel eines Dreyeckes, der durch die Verlängerung einer Seite entsteht, ist den beyden innern entgegenstehenden gleich.

Satz. Fig. 36

$$o = m + n$$

Beweis.

$x + o = 180°$ §. 52.
$x + m + n = 180°$ §. 70.

$x + o = x + m + n$
$- x \quad - x$

$o = m + n$

§. 79. **Zusatz.** Ist der äußere Winkel in einem Dreyecke gegeben, so sind die zween entgegengesetzten innern zusammgenommen, und der dritte als Nebenwinkel bekannt.

§. 80. **Zusatz.** Der äußere Winkel am Scheitel eines gleichschenklichten Dreyeckes ist einem doppelten innern gleich, weil sie beyde gleich sind; folglich einer von beyden zweymal genommen so viel ist, als alle beyde.

§. 81. **Lehrsatz.** Der Winkel zwischen zwo Parallellinien ist so groß als die Summe der zween

spizi-

spitzigen Winkel, die seine verlängerten Schenkel mit den Parallellinien machen.

Satz. Fig. 37

o = n + y

Beweis.

Man verlängere auch einen der Schenkel rückwärts bis auf die Parallellinie, so entstehen Wechselwinkel, ein Dreyeck und ein äußerer Winkel an selben. Es ist demnach

o = m + y §. 78.
Aber n = m als Wechselw.
subst. o = n + y

§. 82. **Erkl.** Wenn der Scheitelpunkt eines Winkels im Zentrum eines Zirkels ist, so heißt dieser Winkel ein Zentralwinkel. Liegt aber der Scheitelpunkt in der Peripherie, so bekömmt ein solcher Winkel den Namen — Peripherialwinkel.

§. 83. **Lehrsatz.** Jeder Peripherialwinkel hat zu seinem Maase den halben Bogen, den seine verlängerten Schenkel von der Peripherie abschneiden.

Der Beweis, um recht allgemein zu seyn, muß durch drey Fälle geführt werden. Denn es kann

I ein Schenkel durch den Mittelpunkt gehen;

II der Mittelpunkt sich zwischen den beyden Schenkeln befinden;

III oder derselbe kann gar ausser den beyden Schenkeln liegen.

Satz für den ersten Fall. Fig. 38

$$x = \frac{a\,b}{2}$$

Beweis.

Man beschreibe auf den nämlichen Bogen auch einen Zentralwinkel, so erhält man ein gleichschenklichtes Dreyeck, wo die Radiusse die Schenkel abgeben, und erhält auch einen äußern Winkel am Scheitel; folglich ist

$$2x = c \quad \text{§. 80.}$$
$$a\,b = c \text{ als sein Maas}$$
$$\overline{2x = a\,b}$$
$$:2 \quad x = \frac{a\,b}{2}$$

Satz für den zweyten Fall. Fig. 39

$$x = \frac{a\,b}{2}$$

Beweis.

Man theile den Winkel mittels einer Linie durch das Zentrum in zween Theile, so hat man den obigen ersten Fall doppelt; denn es ist

$$o = \frac{a\,c}{2}$$
$$n = \frac{c\,b}{2}$$
$$\text{add.} \quad o + n = \frac{a\,c + c\,b}{2}$$

oder $x = \frac{a\,b}{2}$; weil sich das Ganze für die Theile zusamm genommen substituieren läßt.

Satz für den dritten Fall. Fig. 40

$$x = \frac{a\,b}{2}$$

Beweis.

Man ziehe durch das Centrum des Zirkels aus dem Scheitel des Winkels einen Schenkel auf die Peripherie, so hat man mehrmal den ersten Fall doppelt.

Denn $o + x = \frac{a\,c}{2} + \frac{a\,b}{2}$

$-o = -\frac{a\,c}{2}$

$x = \frac{a\,b}{2}$

§. 84. **Zusatz.** Der Zentralwinkel ist daher noch so groß als der Peripherialwinkel, wenn er mit ihm auf einerley Bogen steht; denn der erste hat den ganzen Bogen zu seinem Maase, dieser aber nur die Hälfte desselben.

§. 85. **Zusatz.** Alle Peripherialwinkel, die auf einerley Bogen stehen, sind gleich; eben darum, weil jeder die nämliche Bogenhälfte zum Maase hat. Fig. 41

Denn $x = \frac{1}{2}\,a\,b$

$m = \frac{1}{2}\,a\,b$

$y = \frac{1}{2}\,a\,b$

folglich $x = m = y$

§. 86. **Anmerkung.** Da in der Optik erwiesen wird, daß beym nämlichen Sehungswinkel auch die nämliche scheinbare Größe und Deutlichkeit des Gegenstandes statt hat, so würde z. B. für Amphitheater die runde Form die angemessenste seyn; damit die Scene, welche als ein Zirkelausschnitt dieses Rundels betrachtet werden kann, einen gleichen Sehungswinkel, und eben darum gleiche Deutlichkeit und Größe in den Augen der Zuschauer hervorbrächte.

§. 87. **Zusatz.** Einer von den Schenkeln eines solchen Peripherialwinkels läßt sich als Sehne immer kleiner und kleiner gedenken; ohne, daß die Allgemeinheit des Satzes sich nicht mehr darauf erstrecken sollte. Folglich ist der Satz auch noch wahr, wenn einer der Schenkel der kleinstmöglichste Theil einer Linie, oder so zu sagen, nur ein Punkt ist, und bey seiner Verlängerung, gemäß der Definition zur Tangente wird.

§. 88. **Zusatz.** Der Winkel also, den eine Sehne mit seiner Tangente macht, wie Fig. 42 hat zum Maase den halben Bogen, welcher zwischen der Sehne und der Tangente liegt.

§. 89. **Anmerk.** So richtig dieß auch aus den Vorhergehenden fließt, so strenge läßt sich dieß weiter unten aus andern Gründen erweisen.

§. 90. **Zusatz.** Jeder Peripherialwinkel, dessen Schenkel auf den Endpunkten des Diameters stehen, ist ein rechter Winkel; denn sein Maas ist die halbe Peripherie halb genommen.

Satz. Fig. 43

$$x = 90$$

Beweis.

$$x = \frac{abc}{2} = \frac{180}{2} = 90°$$

§. 91. **Aufgabe.** Auf den Endpunkt einer Linie einen Perpendickel aufrichten.

Auflösung. Man wähle einen solchen Punkt über der Linie, daß man aus selbem mit einem Handzirkel so wohl den Endpunkt erreichen, als auch die Linie selbst schneiden könne. Mit dieser Oeffnung nun beschreibe man aus dem nämlichen

Punkt einen Zirkel; ziehe aus dem Durchschnittspunkt der Linie einen Diameter, und verbinde diese beyden Sehnen durch eine dritte Sehne, so ist diese perpendikular; denn es ist Fig. 44

$$x = 90°$$

Beweis.

$$x = \frac{abc}{2} = \frac{180}{2} = 90°$$

§. 92. **Zusatz.** Ein Winkel, den die Tangente mit dem Diameter macht, wie Fig. 45 ist demnach ein rechter Winkel; weil der Bogen welcher zwischen dem Diameter und der Tangente liegt, die halbe Peripherie selbst ist §. 88., folglich das Maas des Winkels ein Quadrant seyn muß.

§. 93. **Zusatz.** Es stehet deswegen jeder Diameter, und jeder Radius, weil er ebenfalls zum Diameter verlängert werden kann, perpendikulär auf seine Tangente.

§. 94. **Zusatz.** Eben so richtig ist, daß ein Winkel, welchen zween Tangenten miteinander machen, die halbe Differenz jener Bögen, die die Tangentialpunkte begränzen zum Maase haben. Fig. 46

Satz.

$$x = \frac{afc - abc}{2}$$

Beweis.

Man verbinde die beyden Tangentialpunkte durch eine Sehne so ist

$$x + m = z$$

$$x = z - m$$

Aber $z = \frac{afc}{2}$

$m = \frac{abc}{2}$ substit.

$$x = \frac{afc - abc}{2}$$

§. 95. Zusatz. Die Tangenten, welche den Winkel bilden, haben demnach allemal gleiche Länge; denn $o = \frac{abc}{2}$

und $m = \frac{abc}{2}$

also $o = m$ folglich ist das Dreyeck agc gleichschenklicht §. 48., und $ag = gc$.

§. 96. Lehrsatz. Zween und zween einander entgegengesetzte Winkel eines im Zirkel hinein beschriebnen Trapezes halten zusamm 180°.

Sätze. Fig. 47

1) $y + m = 180$
2) $o + x = 180$

Beweis.

1) $y = \frac{bcd}{2}$, $m = \frac{dab}{2}$ } §. 83.

$y + m = \frac{bcd + dab}{2}$

aber $bcd + dab = 360°$

subst. $y + m = \frac{360}{2}$ oder

$y + m = 180$

2) $o = \frac{abc}{2}$

$x = \frac{adc}{2}$

aber $abc + adc = 360$

$o + x = \frac{360}{2}$ oder

$o + x = 180°$

§. 97.

§ 97. **Lehrsatz.** Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt ausser einem Kreise liegt, und beyde Schenkel die Peripherie durchschneiden können, hat zu seinem Maase die halbe Differenz der beyden Bogen, die zwischen seinen verlängerten Schenkeln liegen. Fig. 48

Satz.

$$x = \frac{cd - ba}{2}$$

Beweis.

Da die Abschnitte der Schenkel innerhalb der Peripherie Sehnen bilden, so hänge man sie durch eine dritte Sehne zusamm, und dann ist

$x + y = o$ als ein äußerer Winkel am
oder $x = o - y$ Dreyeck.
subst. $x = \frac{cd}{2} - \frac{ab}{2}$ als Peripherialw.

$$x = \frac{cd - ab}{2}$$

§. 98. **Lehrsatz.** Jeder Winkel innerhalb der Peripherie hat znm Maase die halbe Summe der beyden Bögen die seine und seines Vertikalwinkels verlängerte Schenkel abschneiden. Fig. 49

Satz.

$$x = \frac{cd + ab}{2}$$

Beweis.

Man verbinde zweyerley Schenkel durch eine Sehne zum Dreyeck, so ist

$x = m + y$
subst. $x = \frac{cd}{2} + \frac{ab}{2}$ wegen Peripherialw.
oder $x = \frac{cd + ab}{2}$

Figu-

Figurenwandlung.

§. 99. Erkl. Eine Figur in eine andere umwandeln, heißt der Figur eine andere Gestalt geben, ohne den Inhalt derselben zu verändern.

§. 100. Lehrsatz. Jedes Parallellogram wird von einer Diagonallinie in zween gleiche Theile getheilt. Fig. 50

Satz.

x = y

Beweis.

dc = ab ⎫ als entgegenstehende Seiten
ad = bc ⎭ eines □.
ac = ac folglich

△x = △y

§. 101. Erkl. Ein Perpendickel, welcher von einer Seite zur andern in Parallellogramen gezogen wird, heißt die Höhe, und die Linie worauf man ihn gezogen hat, die Grundlinie, wie Fig. 51 In Dreyecken wird der Perpendickel von was immer für einen Winkel auf die entgegengesetzte Seite als die größte Höhe hingefällt; z. B. Fig. 52 Nro I, wo auch in benöthigten Fällen diese Grundlinie verlängert werden muß, wie Nro II

§. 102. Lehrsatz. Ein jedes schiefwinklichtes Parallellogram läßt sich in ein ihm gleiches rechtwinklichtes von einerley Höhe und Grundlinie verwandeln; und auch umgekehrt. Oder mit andern Worten: Parallelograme von einerley Grundlinie„sind gleich.

und Höh

Dieß

Dieß zu erweisen, stelle man die Parallelogramme auf eine gemeinschaftliche Grundlinie, so wird entweders

I eine von den Gegenseiten da aufhören, wo die andere anfängt; oder

II sie werden zum Theil in einander liegen, oder endlich

III sie werden zwischen ihnen einen leeren Raum lassen. Der Beweis ist überall etwas anders.

Erster Fall.

Satz. Fig. 53 Nro I

$$x + y = y + z \quad *)$$

Beweis.

$x = y$, wegen der Diagonal
$z = y$ ebenfalls.

$x = z$
$+y = +y$ überall addiert

$$x + y = y + z$$

Zweyter Fall.

Satz. Nro II

$$x + y = y + z$$

Beweis.

$ac = fg$ } als Gegenseiten eines
$bd = fg$ } Parallelograms

also $ac = bd$
$-bc = -bc$

$ac - bc = bd - bc$ und in der Figur ab

*) Wo diese Buchstaben keine Winkel, sondern jene begränzten Räume bedeuten, worinn sie stehen.

a b = c d
ferner a f = c g
und b f = d g folglich

Δ x = Δ z aber
+y = +y

x+y = y+z

Dritter Fall.

Satz. Nro III

x+y = y+z

Beweis.

Man verbinde die beyden Gegenseiten der Grundlinie durch eine dritte Linie, so ist

a b = g f
c d = g f } als Gegenseiten in □ en

a b = c d
+b c = +b c

ab + b c = c d + b c und in der Figur
a c = b d ferner wieder
a g = b f
c g = d f also
Δ (x+v) = Δ (v+z)
−v = −v

x = z
+y = +y

x + y = y + z

§. 103. Zusatz. Weil Dreyecke nichts anders sind, als Hälften von Parallelogramen, so gilt der erwiesene Satz auch von Dreyecken; das heißt: Drey-

ecke

ecke von einerley Grundlinie und Höhe sind dem Inhalte nach gleich. Inzwischen läßt sich dieß auch förmlich beweisen.

Satz. Fig. 54

$$\triangle abc = \triangle bgc$$

Beweis.

Man kompliere diese Dreyecke zu Parallelograme von einerley Höhe und Grundlinie, so ist erwiesen, daß

$$abcf = dgbc$$

$$:2 \quad \frac{abcf}{2} = \frac{dgbc}{2}; \text{ in der Figur}$$

$$\triangle abc = \triangle bgc$$

§. 104. Lehrsatz. Jedes Parallelogram kann in ein anders von gegebner Höhe oder Grundlinie verwandelt werden.

Denn man setze die gegebne Grundlinie in der nämlichen Richtung an die vorige; ziehe von dem Endpunkt derselben eine unbestimmte gerade Linie durch den nächsten Winkelpunkt der Figur; verlängere die Linien überall von dieser Seite; schließe diese Verlängerungen durch Parallellinien, so erhält man ein großes aus vier kleinern Parallelogramen zusamm gesetztes Parallelogram, wovon jene zwey gleich sind, durch welche die Diagonallinie nicht durchgeht.

Satz. Fig. 55

$$y = x$$

Beweis.

Beweis.

$$\left.\begin{array}{rcl} m+x+v & = & n+y+z \\ -m & = & -n \end{array}\right] \text{ wegen der Diagonal}$$

$$x+v = y+z$$

$$-v = -z \text{ aus gleichem Grunde}$$

$$x = y$$

§. 105. **Zusatz.** Giebt man die Höhe, so ist der nämliche Fall der Methode; nur setzt man sie lieber an eine Höheseite des zu verwandelnden Parallelograms, wo die Diagonal dann abwärts gezogen wird.

§. 106. **Zusatz.** Wenn man also, wo immer in einem Parallelograme zwo Linien, die mit den Seiten parallel gehen, so zieht, daß sie sich einander auf der Diagonal durchschneiden, so entstehen allemal 4 neue Parallelograme, wovon jene zwey gleich sind, wo die Diagonal nicht durchgeht.

§. 107. **Zusatz.** Sollen schiefwinklichte Parallelograme verwandelt werden; so thut man am besten, wenn man allererst selbe in Rechtecke, und dann in die verlangten Figuren verwandelt.

§. 108. **Zusatz.** Daraus erhellet ferner, daß die Parallelograme auch nach der Verwandlung verschiedene Winkel annehmen können; wenn nur die Grundfläche und Höhe beybehalten werden.

§. 109. **Lehrsatz.** Jedes Dreyeck läßt sich in ein Parallelogram verwandeln, von verlangter Grundlinie oder Höhe. Auch ein Winkel nicht ausgenommen, der sich in dem verwandelten Parallelogram vorfinden soll.

Denn

Denn man kompliere das Dreyeck zu einem Parallelograme von gleicher Grundlinie und Höhe, und halbiere dasselbe durch einen Parallelschnitt, so kann man mit einer der Hälften, weil es wieder ein Parallelogram ist, wie oben verfahren.

Satz. Fig. 56

$$n + y = z$$

Beweis.

$$n + y = \tfrac{1}{2}\,acdb$$

$$x + n = \tfrac{1}{2}\,acdb$$

$$n + y = x + n$$

aber $z = x + n$ §. 106.

$$n + y = z$$

§. 110. Zusatz. Ist das Parallelogram einmal fertig, so kann es in allerley Rhombusse von verlangten Winkeln umgeschaffen werden, ohne daß der Inhalt dabey verliert; weil immer die nämliche Parallelweite als Höhe, und die nämliche Grundlinie bleibt.

§. 111. Zusatz. Daraus wird begreiflich, wie Dreyecke eben so leicht wieder in andere Dreyecke umgewandelt werden können. Denn man mache alles wie vorher, nur lasse man den Parallelschnitt weg, und ziehe in dem neuentstandenen Parallelogram eine Diagonal, und es ist Fig. 57

Satz.

$$y = z$$

Beweis.

Beweis.

$$x + y = z + v$$

aber $v = z$

und $x = y$ folglich subst.

$y + y = z + z$ oder abgek.

$2y = 2z$

$:2 \quad y = z$

§. 112. **Zusatz.** Was oben von verlangter Grundlinie, Höhe, oder Schiefe gesagt worden, gilt alles hier ebenfalls.

§. 113. **Lehrsatz.** Wenn die Diagonal eines Parallelograms in zween gleiche Theile getheilt, und durch den Theilungspunkt eine gerade Linie, wie immer an zwo Seiten hingezogen wird, so entstehen in jedem Falle gleiche Vierecke.

Satz. Fig. 58

$$x + z = y + v$$

Beweis.

	fa	$= fb$	aus der Voraussetz.
	r	$= s$	als Vertikalw.
	o	$= m$	als Wechselw.
folglich	$\triangle y$	$= \triangle z$	Nun ist aber
	$x + y$	$= z + v$	
	$- y$	$= - z$	
	x	$= v$	
	$+ z$	$= + y$	
	$x + z$	$= v + y$	

§. 114.

§. 114. **Zusatz.** Weil sich solcher Linien unendlich viele durch den Mittelpunkt der Diagonal ziehen lassen, so kann ein Parallelogram, in unendlicherley gleiche Trapezien zertheilet werden.

§ 115. **Erkl.** In einem rechtwinklichten Dreyecke heißen die beyden Seiten, welche den rechten Winkel bilden, Lothen oder Katheten, und die Gegenseite des rechten Winkels wird Hypothenuse genannt.

§. 116. **Lehrsatz.** In jedem rechtwinklichten Dreyecke ist das Quadrat der Hypothenuse gleich den Quadraten der beyden Lothen zusamm genommen.

Satz. Fig. 59

$$a\,c^2 = a\,b^2 + b\,c^2$$

Beweis.

Man quadrire die Seiten in der Figur; ziehe aus dem rechten Winkel des Dreyeckes einen Perpendickel auf die Hypothenuse, und verlängere selben durch das Quadrat eben dieser Linie, so wird dasselbe in zwey Parallelograme zerschnitten. Wenn man nun den an einem Parallelograme anliegenden Theil des Dreyecks sowohl zum ~~benachbarten Quadrate, als wieder zum Parallelograme~~ hinzu denkt, so hat man Trapezen. Man ziehe hier überall die längere Diagonal; dann auch in dem Parallelogram und Quadrat; doch so, daß die vorigen nicht durchschnitten werden: und der Beweis fängt also an

o = o
n = m als Rechtwinkel.

folglich o + n = o + m

$ab = ad$ } als Seiten des nämlichen
$ag = ac$ } Quadrates.

Es ist demnach

$\triangle agb = dac = dab^*) = \frac{1}{2} ab^2$
$\triangle agb = afg^*) = \frac{1}{2} aghf$

$\frac{1}{2} aghf = \frac{1}{2} ab^2$
$2\times \quad aghf = ab^2$

Nachdem man in dem übrigen Parallelogram und Quadrate die nämlichen Diagonalen gezogen, so ist auch

$x = x$
$y = z$

$x + y = x + z$
$cl = ca$
$bc = bq$

also $\triangle clb = acq = qcb^*) = \frac{1}{2} bc^2$
und $\triangle clb = flc^*) = \frac{1}{2} fhlc$

$\frac{1}{2} fhlc = \frac{1}{2} bc^2$
$\times 2 \quad fhlc = bc^2$ aber oben war
$aghf = ab^2$

$fhlc + aghf = ab^2 + bc^2$ in der
Figur $ac^2 = ab^2 + bc^2$

§. 117. **Anmerk.** Der vorgetragene Beweis dieses wichtigen Satzes, der in alle Theile der Mathematik so viel Einfluß hat, ist der abgekürzte euklidische. Es giebt vier und zwanzigerley Beweisarten, und wir wollen weiter unten noch ein Paar recht kurze anführen, nicht so fast, um mehr Ueberzeugung zu bewirken, als um zu erhärten, daß man auf verschiedenen Wegen zur Wahrheit gelangen kann.

§. 118.

*) Die mit Sternchen bezeichneten Dreyecke sind deßwegen den unmittelbar vorhergehenden gleich, weil sie mit selben gemeinschaftliche Grundlinie, und die Parallelweite zur gemeinschaftlichen Höhe haben.

§. 118. Zusatz. Das Quadrat einer Lothe ist demnach so groß als das Quadrat der Hypothenuse, weniger dem Quadrate der andern Lothe. Denn wenn die Hypothenuse = h, und die zween Perpendickel oder Lothen P und p bezeichnen, so ist

$$h^2 = P^2 + p^2$$

Nun $-p^2 = -p^2$

$$h^2 - p^2 = P^2$$

Oder

$$h^2 = P^2 + p^2$$

$$-P^2 = -P^2$$

$$h^2 - P^2 = p^2$$

§. 119. Anmerk. Eine Aufgabe hierüber zur Anwendung. Von dem Wetterableiter eines Thurms steigt ein schiefer Drath von 38 Klafter auf die Erde herunter. Das Ort wo er sich in die Erde senkt, ist beyläufig 13 Klafter vom Thurme entfernt; wie hoch mag wohl der Thurm seyn?

Auflösung. Weil der Drath eine Hypothenuse, der Thurm eine Lothe, und die oben bestimmte Entfernung die Grundlinie von einem angeblichen Dreyecke vorstellt, so ist sicher

$$38^2 = x^2 + 13^2$$

$$1444 = x^2 + 169$$

$$-169 \qquad -169$$

$$1275 = x^2$$

$$35{,}7 = x$$

Eine zweyte Aufgabe. Jemand besitzt ein Haus an einem hart vorbeyfließenden Bache. Er möchte sich gern eine Feuerleiter machen lassen, die er auch jenseits des Baches anlehnen könnte. Wie hoch muß sie werden, wenn der Bach 18 Schuh breit, und die daranstoßende Mauer 32 Schuh hoch ist?

Auflösung. Auch hier stellt die Leiter eine Hypothenuse, die Mauer eine Lothe, und der Bach die Basis vor. Daher

$$x^2 = 32^2 + 18^2$$
$$x^2 = 1024 + 324$$
$$x^2 = 1348$$
$$x = 37 \text{ Schuh beynahe.}$$

§. 120. **Zusatz.** Sind die Lothen gleich, das heißt, ist das rechtwinklichte Dreyeck gleichschenklicht, so wird eben darum das Quadrat der Hypothenuse gleich dem doppelten Quadrat einer Lothe seyn.

§. 121. **Anmerk.** Hieher gehört die Aufgabe: Der berühmte de Romas (Bremisches Magaz. B. 2. S. 114) ließ einen großen papiernen Drachen bey der Annäherung einer Gewitterwolke in die Höhe steigen, um elektrische Versuche anzustellen. Er hatte 780 Fuß von der Schnur abgewickelt; und schätzte den Winkel, welchen die Schnur mit dem Horizont machte 45°; wie hoch mag wohl der Perpendikulärabstand des Drachen von der Erde gewesen seyn?

Auflösung. Da der Perpendickel, welcher von dem Drachen auf die Erde fällt, mit der Schnur und einem Theile der Horizontallinie ein rechtwinklichtes Dreyeck von der Art bildet, daß ein Winkel an der Hypothenuse 45° hält, so muß nach §. 73. nothwendig dasselbe gleichschenklicht seyn; folglich

$$x^2 + x^2 = 780^2$$
$$2\ x^2 = 608400$$
$$:2 \qquad x^2 = 304200$$
$$x = 551{,}6'' \text{ Schuh beynahe.}$$

§. 122. **Zusatz.** Aus diesem pythagorischen Lehrsatze fließt nun eine Anleitung, mehrere Quadrate in eins zu verwandeln. Man darf bloß die Seiten zweyer verschiedner Quadrate unter einem rechten Winkel zusammsetzen, die Hypothenuse ziehen, und quadrieren, so ist das Quadrat so groß, als die beyden gegebnen Quadrate zusamm genommen. Will

man noch ein Quadrat dazu addieren, so setze man dessen Seite rechtwinklicht auf die Hypothenuse, ziehe eine neue Hypothenuse, so ist ihr Quadrat so groß als die Summe der drey gegebenen Quadrate, u. s. f. Die Sache läßt sich auch algebraisch beweisen. Fig. 60 Nro I Man benenne die Seiten der Quadrate durch einen Buchstaben, und übertrage sie Nro II in der nämlichen Länge

Satz.

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + v^2$$

Beweis.

$$\begin{aligned} m^2 &= x^2 + y^2 \\ n^2 &= m^2 + z^2 \\ s^2 &= n^2 + v^2 \end{aligned}$$

$$m^2 + n^2 + s^2 = x^2 + m^2 + n^2 + y^2 + z^2 + v^2$$

$$-m^2 - n^2 = -m^2 - n^2$$

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + v^2$$

§. 123. Zusatz. Eben so leicht ist es, Quadrate noch so groß zu machen oder zu verdoppeln. Es darf nur eine Diagonal des Quadrats quadriert werden.

Satz. Fig. 61

$$a\,b^2 = 2\,a\,c^2$$

Beweis.

$$a\,b^2 = a\,c^2 + c\,b^2$$

Aber $a\,c = c\,b$ als Seite des nämlichen □ts

folglich $a\,c^2 = c\,b^2$

subst. $a\,b^2 = a\,c^2 + a\,c^2$

abgekürzt $a\,b^2 = 2\,a\,c^2$

§. 126.

§. 124. Zusatz. Auf eine nicht viel ungleiche Art halbiert man auch Quadrate. Man ziehe zwey sich durchkreuzende Diagonalen, so werden gleiche Seiten mit den darauf liegenden Wechselwinkeln, wo jeder wegen der Theilung 45° hat, 4 gleiche Dreyecke bestimmen, und die 4 Scheitelwinkel werden rechte Winkel seyn. Wenn nun so ein rechtwinklichtes gleichschenklichtes Dreyeck zu einem Parallelogram kompliert wird, so kann es eben darum kein anders als ein Quadrat geben, folglich ist der

Satz Fig. 62

$$a\,c^2 = \tfrac{1}{2}\,a\,b^2$$

Beweis.

$$a\,c^2 + c\,b^2 = a\,b^2$$

aber $a\,c = c\,b$ und

$$a\,c^2 = c\,b^2$$

subst. $a\,c^2 + a\,c^2 = a\,b^2$

abgek. $2\,a\,c^2 = a\,b^2$

:2 $a\,c^2 = \frac{a\,b^2}{2}$

oder $a\,c^2 = \tfrac{1}{2}\,a\,b^2$

§. 125. Zusatz. Endlich folgt auch noch aus dem obigen Lehrsatze, wie man ein Quadrat von einem anderen gegebnen abziehen müße. Man beschreibe auf einer Seite des größern Quadrats einen Halbzirkel, trage die Seite des anderu Quadrats als Sehne darein, so zwar, daß sie mit dem Diameter einen ~~rechten~~ Winkel macht, so ist die andere Sehne die das Dreyeck schließt, die Seite des restierenden Quadrats. Fig. 63

Satz

$$a b^2 = x - y$$

Beweis.

$$\begin{array}{rl} a b^2 + a c^2 &= b c^2 \\ - a c^2 &= - a c^2 \\ \hline a b^2 &= b c^2 - a c^2 \end{array}$$

oder $a b^2 = x - y$

Figurenberechnung.

§. 126. Erkl. Eine Flächenfigur messen, oder berechnen, heißt, eine andere zur Einheit angenommene Fläche so oft herum legen in derselben, als es möglich ist.

§. 127. Zusatz. Da das Quadrat die schicklichste und regulärste Figur ist, so hat man in jedem Lande ein übliches Quadratmaas angenommen, welches, wenn es ein Quadratschuh ist, einen Schuh in der Länge, und einen in der Breite hält. Bedient man sich aber der Quadratruthen, so muß ein solches Maas eine Ruthe lang und eine Ruthe breit seyn. Ein gleiches versteht sich auch vom Zolle u. s. f.

§. 128. Lehrsatz. Der Inhalt eines Rechteckes ist das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe. Denn die Grundlinie zeigt an, wie viel z. B. Quadratschuhe auf ihr in einer Reihe nebeneinander stehen können, und die Höhe, wie oft diese ganze Reihe von Quadratschuhen in dem Rechteck enthalten sey. Setzen wir, die Grundlinie Fig. 64 sey 4 Schuh lang, also können auf ihr 4 Quadratschuh stehen. Wenn nun ferner die Höhe 3 Schuh hält,

so

so heißt dieß so viel, als, daß diese Reihe von 4 Quadratschuhen 3mal in der ganzen Figur enthalten sey; folglich muß 4 mit 3 multipliciett werden.

§. 129. Zusatz. Indem Quadratschuhe selbst schon Rechtecke sind, so ist der Inhalt eines solchen Quadratmaases ebenfalls das Produkt aus der Länge und Höhe; das ist 10 × 10 = 100 Quadratzolle. Eben so viel Linien hält auch ein Quadratzoll.

§. 130. Zusatz. Weil schiefe Parallelograme den Rechtecken von der nämlichen Grundlinie und Höhe gleich sind, wie oben §. 102. erwiesen worden, so erstreckt sich der obige Lehrsatz §. 128. von Rechtecken auf alle Parallelograme; denn ich darf selbe nur zuerst in Gedanken in Rechtecke von gleicher Grundlinie und Höhe verwandeln, so ist der Lehrsatz anwendbar.

§. 131. Zusatz. Da Dreyecke Hälften von Parallelogramen sind, so muß hier das Produkt aus ihrer Grundlinie und Höhe auch nur halb genommen werden. Dieß geschieht aber, wenn entweder ein Faktor oder das ganze Produkt halbiert wird.

§. 132. Lehrsatz. Da die drey Seiten eines Dreyecks das nämliche Dreyeck völlig bestimmen, so läßt sich, auch ohne Perpendickel, der Inhalt eines gleichseitigen Dreyecks aus der gegebenen Seite; der Inhalt eines gleichschenklichten aus der Grundlinie und einem Schenkel, und der eines ungleichseitigen, aus allen drey Seiten zugleich weit natürlicher finden.

Sätze.

I. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreyeckes ist demnach, wenn l eine Seite (latus) heißt $= \frac{1}{4} l^2 \sqrt{3}$.

II. Der Inhalt eines gleichschenklichten, wenn c einen Schenkel (crus), und b die Grundlinie (basis) bedeutet, $= \frac{1}{2} b \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$

III. Der Inhalt eines ungleichseitigen, wenn a, b, c, die Seiten vorstellen,
$= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$

Beweis des ersten Satzes. Fig. 65 Nro I

Es sey $b\,d = l = a\,b = a\,d$
$b\,c = c\,d = \frac{l}{2}$

Nun ist $\Delta\ a\,b\,d = \frac{b\,d \times a\,c}{2}$ §. 131.

Aber $a\,c^2 = a\,b^2 - b\,c^2$ §. 118.

subst. $a\,c^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$

$= \frac{4\,l^2 - l^2}{4}$

$= \frac{3\,l^2}{4}$

$\sqrt{\ }\quad a\,c = \sqrt{\frac{3\,l^2}{4}}$

$a\,c = \frac{l}{2}\sqrt{3}$

subst. $\Delta a\,b\,d = \frac{l \times \frac{l}{2}\sqrt{3}}{2}$

$\Delta a\,b\,d = \frac{l^2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{4} l^2 \sqrt{3}$

Beweis des zweyten Satzes. Fig. 65 Nro II

Es sey $a\,b = a\,d = c$
$b\,d = b$

also $b\,c = c\,d = \frac{b}{2}$

$a\,c = p$

Daher ist $\Delta\, a\,b\,d = \frac{b \times p}{2}$

allein $p^2 = a\,b^2 - b\,c^2$

$= c^2 - b^2$

$\sqrt{\quad}$ $p = \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$

$\times b \qquad \times b$

$b \times p = b\sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$

:2

$\frac{b \times p}{2} = \frac{1}{2} b \sqrt{c^2 - b^2}$

Aber $\frac{b \times p}{2} = \Delta\, a\,b\,d$

$\Delta\, a\,b\,d = \frac{1}{2} b \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$

Beweis des dritten Satzes. Fig. 65 Nro III

Man heiße $a\,b = a$

$b\,d = b$

$a\,d = c$

$b\,c = x$

so ist $c\,d = b - x$

$a\,c = p$

Es ist mehrmal $\Delta\, a\,b\,d = \frac{b \times p.}{2}$

Also für p einen Werth in bekannten Ausdrücken gesucht.

$a\,c^2 = a\,b^2 - b\,c^2$

$a\,c^2 = a\,d^2 - c\,d^2$

$a\,b^2 - b\,c^2 = a\,d^2 - c\,d^2$ und subst.

$$a^2 - x^2 = c^2 - (b - x)^2$$
$$a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$$
$$+ x^2 \qquad\qquad + x^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2 + 2bx$$
$$a^2 - c^2 + b^2 = 2bx$$
$$\frac{a^2 - c^2 + b^2}{2b} = x$$

Weil nun $a c^2 = a b^2 - b c^2$
oder $p^2 = a^2 - x^2$
ſo iſt $x^2 = a^2 - p^2$
und $x = \sqrt{a^2 - p^2}$
Aber $x = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2b}$

$$\sqrt{a^2 - p^2} = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2b}$$

$$a^2 - p^2 = \frac{a^4 - 2a^2c^2 + 2a^2b^2 + c^4 - 2c^2b^2 + b^4}{4b^2}$$

$$p^2 - a^2 = \frac{2a^2c^2 - a^4 - 2a^2b^2 - c^4 + 2c^2b^2 - b^4}{4b^2}$$

$$p^2 = \frac{2a^2c^2 - a^4 - 2a^2b^2 - c^4 + 2c^2b^2 - b^4}{4b^2} + a^2$$

$$p^2 = \frac{2a^2c^2 - a^4 - 2a^2b^2 - c^4 + 2c^2b^2 - b^4 + 4a^2b^2}{4b^2}$$

$$p^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - c^4 - b^4}{4b^2}$$

Aber $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - c^4 - b^4$
$= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$
ſubſt. $p^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4b^2}$

$$\sqrt{p} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2b}$$

X b

b X p

$$b \times p = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c(-a+b+c)}}{2}$$

$$\therefore 2\,\frac{b \times p}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} = \triangle\ a\,b\,d$$

§. 133. **Anmerk.** Um ein Beyspiel von der praktischen Anwendung dieses Satzes zu geben, so berechne man den Torfgrund in der Gegend von Chiemsee, der ein Dreyeck bildet, wovon die Seiten nach der Angabe des baierischen Landboten von 1790, 10ten Stücks 5830, 7060 und 8246 Füße halten. Der skizierte Ausdruck wäre also nach der Formel

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(5830+7060+8246)\ (5830+7060-8246)(5830-7060+8246)\ (-5830+7060+8246)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{21136 \times 4644 \times 7016 \times 9476} = \tfrac{1}{4}\sqrt{6525738154911744} = \tfrac{1}{4} \times 80782041 = 20195510\tfrac{1}{4}$$

Das ist beynahe 505 Joucharte, das Jouchart zu 40000 Quadratschuhe gerechnet.

§. 134. **Zusatz.** Wir haben oben gezeigt, daß sich jedes Trapetz, jedes Polygon in Dreyecke zerfällen läßt. Alle Dreyecke aber, wenn Höhe und Grundlinie überall bestimmt wird, oder wenn die Seiten derselben bekannt sind, können berechnet werden. Folglich sind wir im Stande jede geradlinichte Figur, wo nicht auf einmal, doch theilweis zu berechnen, und am Ende die gefundenen Resultate zusamm zu addieren.

§. 135. **Lehrsatz.** Wenn ein Trapetz zwo Parallelseiten hat, so ist auch der Inhalt nach einer kürzern Rechnung, gleich dem halben Produkt aus der Summe der Parallelseiten in die Parallelweite.

Satz. Fig. 66

$$a\,b\,c\,d = \frac{(a\,b + c\,d)\ b\,f}{2}$$

Beweis.

Beweis.

Man ziehe eine beliebige Diagonal, so entstehen zwo Dreyecke von einerley Höhe. Es ist nun

$$bcd = \frac{cd \times bf}{2}$$

$$abc = \frac{ab \times bf}{2}$$

$$bcd + abc = \frac{cd \times bf + ab \times bf}{2}$$

Anders ausgedrückt $= \frac{(ab + cd) \times bf}{2}$

In der Figur $abcd = \frac{(ab + cd) \times bf}{2}$

§. 136. **Anmerk.** Wie allerley krummlinichte Flächen berechnet werden müssen, gehört theils in die praktische, theils in die höhere Geometrie. Weiter unten soll auch die Berechnung der Zirkelfläche vorkommen.

Aehnlichkeit der Figuren
und
ihre Verhältnisse zu einander.

§. 137. **Lehnsatz.** Aehnlichkeit hat alles, was bloß in der Größe unterschieden ist.

§. 138. **Zusatz.** Da in den Dreyecken, Quadraten und regulären Vielecken bey der Größe alles auf die Seiten ankömmt, und die Winkel durchaus nichts dazu beytragen, so sind sie einander ähnlich, wenn sie einerley Winkel haben; denn nur in diesem Falle sind sie alleinig in der Größe unterschieden.

§ 139. **Zusatz.** Diesem Begriff zufolge müßen alle Quadrate, gleichseitige, rechtwinklichtgleichschenklichte Dreyecke und gleichnamige Polygone an

und

und für sich schon einander ähnlich seyn; weil die Winkel in solchen Quadraten, in solchen Dreyecken u. s. f. immer die nämlichen sind.

§. 140. **Lehrsatz.** Zwey Parallelograme von einerley Höhe verhalten sich wie die Grundlinien.

Satz. Fig. 67.

$$x : y = cb : bd$$

Beweis.

$$x = cb \times ab$$
$$y = bd \times ab$$

$$x : y = cb \times ab : bd \times ab \quad :ab$$
$$x : y = cb : bd$$

§. 141. **Lehrsatz.** Zwey Parallelograme verhalten sich wie die Höhen, im Falle die Grundlinien gleich sind.

Satz. Fig. 68

$$x : y = ad : ac$$

Beweis.

$$x = ad \times ab$$
$$y = ac \times ab$$

$$x : y = ad \times ab : ac \times ab$$
$$x : y = ad : ac \quad :ab$$

§. 142. **Zusatz.** Weil die Dreyecke Hälften von Parallelogramen sind, so gelten auch beyde obige Sätze von ihnen; das heißt: Die Inhalte zweyer Dreyecke von einerley Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen:

Höhen: sind aber die Dreyecke von einerley Höhe, wie ihre Grundlinien. Wir wollen den letztern Satz zum Ueberfluße erweisen.

Satz. Fig. 69

$$x : y = cd : fg$$

Beweis.

$$x = \frac{cd \times ab}{2}$$

$$y = \frac{fg \times ab}{2}$$

$$x : y = \frac{cd \times ab}{2} : \frac{fg \times ab}{2} \quad \times 2$$

$$x : y = cd \times ab : fg \times ab \quad :ab$$

$$x : y = cd : fg$$

§. 143. **Lehrsatz.** Wenn man in einem Dreyecke, wo man will, mit der Basis eine Parallelinie von einer Seite zur andern zieht, so stehen

I die Abschnitte unter sich im Verhältniße;

II die obern Abschnitte mit den ganzen Seiten;

III die unteren Abschnitte mit den ganzen Seiten, und

IV ein oberer Abschnitt zum Parallelschnitt wie die dem Abschnitt ähnlich liegende ganze Seite zur Basis. Wir werden eins nach dem andern erweisen.

Erster Satz.

$$ab : bc = af : fd$$

Beweis.

Beweis.

Man ziehe im entstandenen Trapez Diagonalen, so wird wegen gleicher Höhe und Grundlinie seyn
Fig. 70

$$\Delta\ bfc = \Delta\ bdf$$

Ferner $abf : bfc = ab : bc$
und $abf : bfd = af : fd$
subst. $: (bfc)$

$$ab : bc = af : fd$$

144. **Anmerk.** Man kann sich leicht vorstellen, wie oft sich dieser Satz im Anschreiben, gemäß der Proportionslehre, modificieren läßt.

Zweyter Satz.

$ab : bc = af : ad$

Beweis.

Erwiesen ist, daß $ab : bc = af : fd$
folglich auch, daß $ab : (bc+ab) = af : (fd+af)$
in der Figur $ab : ac = af : ad$

§. 145. **Anmerk.** Dieser zweyte Satz, so wie auch der folgende ließe sich unmittelbar aus der Figur selbst erweisen. Zum Ueberflusse wollen wir die Art des Beweises ganz hersetzen.

Es ist $\Delta\ bfc = \Delta\ bfd$
$abf = abf$

$$bfc + abf = bfd + abf$$

in der Figur $\Delta\ afc = \Delta\ abd$

Nun $abf : afc = ab : ac$
und $abf : abd = af : ad$
subst. $: (afc)$

$$ab : ac = af : ad.$$

Drit-

Dritter Satz.

cb : ca = df : da

Beweis.

ab : cb = af : fd
oder cb : ab = fd : af
Nun ist cb : (ab + cb) = fd : (af + fd)
In der Fig. cb : ca = df : da

Vierter Satz. Fig. 71

ab : ac = bf : cd

Beweis.

Man ziehe mit der ganzen Seite, die im Satze vorkömmt, aus dem gegenüber stehenden Durchschnittspunkte der andern Seite eine Parallellinie, so ist erstens

af : ad = ab : ac und wenn
ac die Basis af : ad = ch : cd

ab : ac = ch : cd
aber ch = bf wegen Parallelismus
subst. ab : ac = bf : cd

§. 146. **Aufgabe.** Eine gerade Linie, wie wir oben §. 45. versprochen, in drey, oder auch in mehrere Theile zu theilen.

Auflösung. Man ziehe über der gegebnen Linie eine andere damit parallel, schneide durch Hilfe des Handzirkels 3 gleiche Stücke ab, die aber zusamm genommen kleiner als die gegebne Linie seyn müßen; verbinde die Endpunkte der gegebnen und getheilten Linie durch zwo andere, und verlängere diese letzten bis sie sich durchschneiden; so theilen jene Linien, welche

che aus eben diesem Scheitel durch die Theilungspunkte gezogen und gehörig verlängert werden, die gegebene Linie in die verlangten gleichen Theile.

Satz. Fig. 72

ab = bc = cd

Beweis.

Weil in jedem der drey entstandenen Dreyecke mit der Grundlinie eine andere Linie parallel gezogen ist, so verhält sich

kf : kb = lf : ab
und kf : kb = fg : bc

lf : ab = fg : bc
aber lf = fg aus der Konstruktion
subst. fg : ab = fg : bc
bc × fg = ab × fg
fg: bc = ab

Ferner kg : kc = fg : bc
kg : kc = gh : cd

fg : bc = gh : cd
aber fg = gh wie oben
subst. gh : bc = gh : cd
gh × cd = bc × gh
gh: cd = bc
Vorher war bc = ab

Folglich auch bc = cd = ab

§. 147. **Anmerk.** Eben so leicht läßt sich auch jede gerade Linie in mehrere gleiche Theile theilen. Gut wird es seyn, wenn die angenommene Linie sehr nahe an der gegebenen parallel gezogen, und wenn die Theile, so groß als thunlich ist, gemacht werden.

§. 148.

§. 148. **Lehrsatz.** Wenn in einem Dreyecke ein Winkel in zween gleiche Theile getheilt und die Theilungslinie bis zur Gegenseite verlängert wird, so verhalten sich die Segmente dieser Seite, wie die daranstoßenden übrigen zwo Seiten oder Schenkel.

Satz. Fig. 73

a b : b c = a d : d c

Beweis.

Man verlängere einen Schenkel um die Größe des andern Schenkels rückwärts, und schliesse den neuentstandenen Winkel zu einem Dreyecke. Es ist demnach o + m = 2 y als äußerer Winkel im gleichschenk. △ §. 80.

aber o = m
subst. m + m = 2 y
abgek. 2 m = 2 y
:2 m = y, und weil dieß Wechselw. sind.
b d parallel mit c f

Also in dem △ a c f nach §. 143. Nro I.
a b : b c = a d : d f
aber d f = c d aus der Konstrukt.
subst. a b : b c = a d : c d.

§. 149. **Lehrsatz.** In ähnlichen Dreyecken, das heißt, in solchen, wo die Winkel, überall die nämlichen sind, stehen jene Seiten im Verhältniße, deren Gegenwinkel gleich sind.

Es sey in den zwey Dreyecken Fig. 74
a = f
d = g
und 1 = h so ist z. B. der

Satz

Satz

ad : al = fg : fh

Beweis.

Man schneide die zwo Seiten des kleinen Dreyecks, die im Satze begriffen sind, von den zwo ähnlich liegenden Seiten des großen Dreyeckes, vom Scheitelpunkte des nämlichen Winkels angefangen, ab, und verbinde die Abschnittspunkte durch eine Linie, so ist

ab = fb
ac = fh : Aus der Konstrukt.

a = f aus der Voraussf.

Also △ abc ≅ △ fgh und

o = g wegen gleichen Gegenseiten

aber d = g aus der Voraussf.

Folgl. o = d Nun ist wegen der Gleichheit des äußern und innern Winkels

bc parallel mit dl also §. 143. Nro II

ab : ad = ac : al

subst. fg : ad = fh : al

veränd. ad : fg = al : fh

mehrmal ad : al = fg : fh

§. 150. **Anmerk.** Bringt man die übrige Seite in die Proportion, so werden die Abschnitte von jenen zwo ähnlich liegenden Seiten den nämlichen Winkel wie die kleinen Seiten des andern Dreyeckes einschliessen.

§. 151. **Lehrsatz.** Auch in ähnlichen Vielecken stehen jene Seiten im Verhältniße, deren Gegenwinkel gleich sind, oder was eines ist, welche eine ähnliche Lage in beyden Vielecken haben.

Satz. Fig. 75

ab : ac = ld : lh

Beweis.

Man schneide wie vorher die Seiten des kleinen Polygons, von den ähnlichen Seiten des großen Polygons ab, so ist nach gezogener parallelen Diagonal,

o = n; weil nun

auch wie vorher m = o

---

also n = m folglich

lk : lf = ld : lh

subst. ab : ac = ld : lh

§. 152. **Zusatz.** Eben so leicht ist es zu erweisen, daß auch ähnlich liegende Diagonalen untereinander, oder mit ähnlich liegenden Seiten in Proportion, stehen wenn die Vielecke selbst ähnlich sind.

§. 153. **Lehrsatz.** In ähnlichen Dreyecken stehet ferner auch jede ähnlichliegende (homologe oder respondierende) Seite mit derley Perpendikel im Verhältniße.

Sätze. Fig. 76

1) ac : lf = ab : lg

2) cd : fh = ab : lg

Beweis.

1) Weil o = m = 90

und c = f so ist

Δ acb ∽ Δ flg folglich

ac : lf = ab : lg

ac :

2) Es

2) Es ist ohnehin △ acd ∽ △ lfh

also ac : lf = cd : fh

aber ac : lf = ab : lg

Folgl. cd : fh = ab : lg

§. 154. **Zusatz.** Es ist demnach analogisch richtig, daß sich dieser Satz auch auf Polygone ausdehnen läßt.

§. 155. **Lehrsatz.** Die Inhalte ähnlicher Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten.

Satz. Fig. 77

$$X : Y = ab^2 : cd^2$$

Beweis.

Man fälle auf jene zwo Seiten, welche im Satze vorkommen, Perpendikel, so ist erstens

lf : gh = ab : cd

aber ab : cd = ab : cd

$$lf \times ab : gh \times cd = ab^2 : cd^2$$

$$:2 \quad \frac{lf \times ab}{2} : \frac{gh \times cd}{2} = ab^2 : cd^2$$

In der Figur $X : Y = ab^2 : cd^2$

§. 156. **Zusatz.** Weil in ähnlichen Polygonen durch ähnlich gezogene Diagonalen immer zwey und zwey ähnliche Dreyecke entstehen, so verhalten sie sich, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Linien. Wiederholt man demnach die Proportion so oft, als viele Dreyecke da sind, so bekömmt man lauter ähnliche Verhältnisse; wo sich die Summen sämmtlicher

Vorderglieder, welches die Polygone selbst sind, wie die einzelnen Glieder eines hintern Verhältnisses verhalten. Z. B. es wäre der

Satz Fig. 78

$$acdlb : fghkq = ab^2 : qk^2$$

Beweis.

Da zwo ähnliche Dreyecke mit den Quadraten was immer für gleichliegender Linien im Verhältniße stehen, so ist es hier gleichgültig, mit welchen Seitenquadraten man die übrigen Dreyecke in Proportion stellt, wenn nur die ersten zwey die Satzseiten erhalten.

Es ist also $\triangle acb : \triangle fqk = ab^2 : qk^2$
Eben so $\triangle cbd : fkg = cd^2 : fg^2$
und $\triangle dlb : ghk = db^2 : gk^2$ } weil gen ähnlich liegenden Linien.

$(acb + cdb + dlb) : (fqk + fkg + ghk) = ab^2 : qk^2$
oder $acdlb : fghkq = ab^2 : qk^2$

§. 157. **Anmerk.** Daraus läßt sich folgende Frage beantworten. Der ganze Plan einer aufgenommenen Gegend faßt genau $3\frac{1}{2}$ Quadratfuß landesüblichen Maaßes in sich. Eine gewisse Linie davon, welche auf dem Felde 1000 Fuß gemessen, beträgt hier gerade $\frac{1}{4}$ Fuß. Wie viel Quadratschuh mag wohl die aufgenommene Landschaft wirklich groß seyn?

Auflösung. Da es eine der Haupteigenschaften jedes Plans seyn soll, die aufgenommene Revier in einer ähnlichen Figur vorzustellen, so muß die Proportion gelten

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 : 1000^2 = 3\tfrac{1}{2} : x$$
$$\tfrac{1}{16} : 1000000 = \tfrac{7}{2} : x$$
$$\tfrac{x}{16} = \frac{7000000}{2} = 3500000$$

$x = 3500000 \times 16 = 56000000$ Quadratfuß.

Vom

Vom Zirkel.

§. 158. **Lehrsatz.** In ein und dem nämlichen Zirkel korrespondieren gleichen Sehnen auch gleiche Bögen.

Voraussetzung. Fig. 79

hf = ad

Satz.

hgf = abd

Beweis.

Man ziehe Radiusse auf der Sehnen Endpunkte; so ist

hc = ac
cf = cd } als Radiusse.

und hf = ad aus der Voraus s.

also △ hcf ≅ △ acd und

o = m folglich auch ihre Maase

hgf = abd

§. 159. **Lehrsatz.** In ein und dem nämlichen Zirkel korrespondieren auch umgekehrt gleichen Bögen gleiche Sehnen.

Voraussetzung.

fgh = abd

Satz.

fh = ad

Nach gezogenen Radiussen ist wie oben

Beweis.

Beweis.

h c = m d
f c = c a
o = m weil ihre Maase gleich sind
also △ h c f ≅ c a d und
f h = a d

§. 160. **Lehrsatz.** Jeder Perpendikel, welcher eine Sehne im Zirkel in zween gleiche Theile theilt, wird zum Diameter, wenn man ihn gehörig verlängert.

Voraussetzung. Fig. 80

o = m und
b c = c d

Satz.

a f = Diametro oder
a l b k f = a h d g f.

Beweis.

Man verbinde die Endpunkte der Sehnen mit neuen Sehnen, so ist

b c = c d
a c = a c
o = m
also △ a b c ≅ △ a c d und
a b = a d folglich auch
b l a = a h d

Ferner c f = c f
b c = c d
x = y also wiederum

△

Δ bcf $\cong$ Δ cdf und
bf = df daher auch
bkf = dgf
Nun bla = ahd, wie erwiesen worden.

add. bkf + bla = dgf + ahd
In der Figur albkf = ahdgf
oder was eins ist, af = Diametro.

§. 161. Zusatz. Jeder Diameter also, der eine Sehne perpendikulär schneidet, theilet Sehne und Bogen in zween gleiche Theile.

§. 162. Aufgabe. Durch drey gegebene Punkte, die aber nicht in gerader Linie liegen dörfen, einen Zirkel zu beschreiben.

Auflösung und Beweis. Fig. 81 Man verbinde die Punkte durch zwo Linien, oder denke sich wenigst diese Verbindung; theile sie als Sehnen durch Perpendikel in zween gleiche Theile, so werden diese Perpendikel Diameterrichtungen des nämlichen Zirkels seyn. Weil sich aber diese nur in einem einzigen Punkte durchschneiden und zwar im Mittelpunkte, so ist der Durchschnittspunkt dieser verlängerten Perpendikel der Mittelpunkt eines Zirkels, der zu jenen Sehnen gehört, und deren Endpunkte dann nothwendig in der Peripherie liegen müssen.

§. 163. Zusatz. Daraus erhellet von selbst, wie um jedes Dreyeck ein Zirkel beschrieben werden könne, wenn die drey Winkelpunkte als gegebene Punkte betrachtet werden.

§. 164. Lehrsatz. Die Bögen zwischen parallelen Sehnen eines Zirkels sind gleich.

Satz. Fig. 82

$bc = qg$

Beweis.

Man ziehe mit den zwo Sehnen auch noch den Diameter parallel, im Fall keine von den Sehnen selbst ein Diameter ist, fälle von den Endpunkten der Sehnen auf den Diameter Perpendikel, so werden dieses halbierte Sehnen seyn, welche gleichen halbierten Bögen entsprechen, folglich weil

$$\left.\begin{array}{rl} fc &= lg \\ \text{und } db &= kq \end{array}\right\} \text{ als Zwischenparallelen}$$

$$\text{so ist auch } ac = ig$$

$$\text{und } ab = iq$$

$$\text{also } ac - ab = ig - iq$$

$$\text{In der Figur } bc = qg.$$

§. 165. **Zusatz.** Es sind diesemnach auch jene Bögen in einem Zirkel gleich, welche zwischen einer Tangente und einer parallelen Sehne liegen; denn man denke sich Fig. 83 von der Sehne bis zur Tangente lauter parallele Sehnen, so wird die letzte, welche wegen beständigen Abnehmen zum Punkte geworden, in der Tangente selbst liegen, folglich ist $ab = bc$

§. 166. **Anmerk.** Nun läßt sich jener Satz, daß ein Winkel, den eine Sehne mit der Tangente macht, den Bogen, der zwischen der Tangente und Sehne liegt, zum Maase habe, nach aller Strenge beweisen. Es wäre also

Satz. Fig. 84

$$x = \frac{bdf}{2}$$

Beweis.

Beweis.

Man ziehe aus dem andern Endpunkte der Sehne eine Parallelsehne mit der Tangente, so ist

$$m = x$$
$$m = \frac{acb}{2}$$

also $x = \frac{acb}{2}$

aber $acb = bdf$,

subst. $x = \frac{bdf}{2}$

So auch der Satz, daß der Winkel, den zwo Tangenten machen, die halbe Differenz jener Bögen zum Maase habe, welche die Tangentialpunkte bestimmen; nämlich daß Fig. 85. $m = \frac{bca - ba}{2}$ sey. Denn, wenn aus einem Tangentialpunkte eine Sehne mit der andern Tangente parallel gezogen wird, so ist

$$x = m$$
$$x = \frac{ac}{2}$$

$$m = \frac{ac}{2}$$

aber $ac = bca - bc$ und weil $bc = ab$, ist

$ac = bca - ab$ subst. giebt.

$$m = \frac{bca - ab}{2}$$

§. 167. **Lehrsatz.** Wenn sich zwo Sehnen innerhalb des Zirkels schneiden, sind die Produkte aus den zwey Segmenten jeder der beyden Sehnen gleich: schneiden sie sich aber außerhalb, so sind die Produkte aus den verlängerten Sehnen in ihre Segmente außer dem Zirkel ebenfalls gleich.

Satz für den ersten Fall. Fig. 86

$$bc \times cd = ac \times cf$$

Beweis.

Man schließe die Vertikalwinkel mit Sehnen, so ist

$b = \frac{1}{2} ad$
$f = \frac{1}{2} ad$ } als Peripherialw.

also $b = f$
Eben so ist $d = a$
und $o = m$ folglich
$\Delta abc \backsim \Delta cdf$ und
$bc : ca = cf : cd$ also
$bc \times cd = ca \times cf.$

Satz für den zweyten Fall. Fig. 87

$$ad \times ab = af \times ac$$

Beweis.

Man beschreibe durch Hilfe zwoer anderer Sehnen ein Trapetz im Zirkel, so wird

$o + n = 180°$ seyn §. 96
$x + o = 180$ als Nebenw.

$o + n = x + o$
$-o \qquad -o$

$n = x$ ferner
$a = a$
also $m = y$ folglich
$\Delta abc \backsim \Delta adf$ und
$ad : af = ac : ab$ also
$ad \times ab = af \times ac$

§. 168. **Zusatz.** Geschieht es, daß eine Sehne innerhalb des Zirkels die andere im Durchschneidungspunkte halbieret, so ist das Quadrat der halben Sehne gleich dem Produkt der Segmente der andern Sehne.

Satz. Fig. 88

$$cb^2 = ab \times bh$$

Beweis.

$$cb \times bd = ab \times bh$$

aber $cb = bd$

subst. $cb \times cb = ab \times bh$

abgek. $cb^2 = ab \times bh$

§. 169. **Anmerk.** Dieser ordentlich abgeleitete Zusatz wird fast in allen mathematischen Lehrbüchern gewöhnlich als ein selbstständiger Lehrsatz so vorgetragen: Ein auf den Diameter des Zirkels herabgefällte Perpendikel ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Segmenten des Diameters, und könnte unabhängig von dem vorhergehenden Lehrsatze so erwiesen werden.

Satz.

$$ab^2 = db \times bf$$ Fig. 89.

Beweis.

Man ziehe aus dem Endpunkte des Perpendikels einen Radius, so ist

I weil $dc = cf = ac = r$ welches r den Radius vorstellt.

$$db = r - bc$$

$$bf = r + bc$$

mult. $db \times bf = r^2 - bc^2$

II $ab^2 = r^2 - bc^2$ nach pyth. Lehrs.

Also $ab^2 = db \times bf$.

So

So wollte Klemm diesen Satz erweisen, obwohl sein Beweis weit gedehnter und verworner ausfiel. Er fügte noch überdieß einen Beweis aus der Aehnlichkeit der Dreyecke bey. Alles dieß schadet nichts, um zu zeigen, daß man auf ganz verschiedenen Wegen zur mathematischen Wahrheit gelangen könne: ich sehe aber nicht ab, warum man diesen besondern Fall nicht eben so gut, oder noch richtiger aus dem vorigen allgemeinen Lehrsatze herleiten sollte.

§. 170. **Zusatz.** Es ist nun leicht jedes Parallelogram in ein Quadrat zu verwandeln; denn es darf nur seine Höhe an die Länge in der nämlichen Richtung gesetzt, über die ganze Linie ein halber Zirkel geworfen, und auf dem Zusammstoßungspunkte der Höhe und Länge ein Perpendickel errichtet werden, so ist dieß die Seite des verlangten Quadrats.

Satz. Fig. 90

$$X = Y$$

Beweis.

$$ab^2 = bc \times bf$$

aber $bd = bc$

subst. $ab^2 = bd \times bf$ oder

$$X = Y$$

§. 171. **Anmerk.** Klemm (in seinem Lehrbuche) verspricht früh vor diesem Satze schon §. 487. ein Parallelogram in ein Quadrat zu verwandeln und baut auf diese Supposition sogar Zusätze, als z. B. §§. 495, 508; leistet es aber nirgends, und wird es auch bis dahin wohl schwerlich zu leisten im Stande seyn.

§. 171. **Zusatz.** Aus obigem Satze fließt auch die Methode, die Quadratwurzel aus jeder Zahl durch

Zeich-

Zeichnung oder Konstruktion zu finden. Man schneide nämlich von einer Linie so viel gleiche Theile ab, als viele Einheiten die Zahl hat, und noch einen Theil dazu, werfe nun über diese Theile einen halben Zirkel, und richte auf dem ersten Theilungspunkt einen Perpendikel auf, so drückt er die Quadratwurzel von der verlangten Zahl aus. Z. B. es soll aus 5 die Wurzel gezogen werden; so schneide man von einer Linie 6 gleiche Stücke ab, und verfahre, wie gesagt worden.

Satz. Fig. 91

$$ab = \sqrt{5}$$

Beweis.

$$ab^2 = cb \times bd$$

aber $cb = 1$

und $bd = 5$

folgl. subst. $ab^2 = 1 \times 5$ oder

$$ab^2 = 5$$

also $ab = \sqrt{5}$

§. 173. **Zusatz.** Es kann eine Sehne, wie schon öfter erinnert worden, so klein werden, daß sie einem Punkt gleicht, aber doch noch eine Linie bleibt, folglich, wenn man sie verlängert eine Tangente vorstellt, weil sie bloß in die Peripherie, und nicht in die Zirkelfläche fällt. Wenn nun eine andere Sehne von einem ihrer Endpunkte so lange außerhalb fortgezogen wird, bis sie die Tangente schneidet, welche wiederum beyderseits verlängert werden kann, so ist, vorausgesetzt daß die Tangente nicht mit der Sehne parallel läuft, das Quadrat der Tangente

so groß, als das Produkt aus der verlängerten Sehne in das Stück außer der Peripherie.

Satz. Fig. 92

$$ab^2 \; ac^2 = bd \times bc$$

Beweis.

Weil ein einziger Punkt die verlängerte Sehne weder kürzer noch länger macht, so ist

$$ab \neq ab = bd \times bc$$

Das ist $ab^2 = bd \times bc$

§. 174. **Anmerk.** Strenger läßt sich dieser abgeleitete Satz aus der Aehnlichkeit der Dreyecke erweisen; denn man ziehe aus dem Tangentialpunkte Linien an die Endpunkte der Sehne, so ist Fig. 93

$$\triangle abc \backsim abd$$

Denn $x = \frac{bc}{2}$ als Sehnenwinkel mit der Tang.

auch $d = \frac{bc}{2}$ als Peripherialw.

also $x = d$

ferner $a = a$

folglich auch $m = (x + y)$

Nun $ab : ac = ad : ab$

$$ab^2 = ac \times ad$$

§. 175. **Anmerk.** Klemm schränkt diesen Satz blos auf den Fall ein, wenn die Tangente mit seinem Diameter verbunden, und aus dem andern Endpunkte desselben, dieser Tangente eine Hypothenuse, wie er sich ausdrückt, entgegen gezogen wird; er beweist zweytens diesen Satz ganz unabhängig vom Hauptsatze; obwohl nichts natürliches als dessen Ableitung von selbem ist. Was seine Gründe hiezu waren, ist mir ein Räthsel.

§. 176. **Anmerk.** Auf eine ähnliche Art fand ich einen neuen Beweis für den pythagorischen Lehrsatze. Man beschreibe mit einer Lothe aus dem anliegendem schiefen Winkel

kel einen Zirkel durch das Dreyeck, so hat man den obenerwiesenen Fall, wenn die andere Lothe zuvor um den Radius rückwärts verlängert worden.

Satz. Fig. 94

$$db^2 = ad^2 + ab^2$$

Beweis.

$$ad^2 = dc \times df$$

Aber $dc = db + ab$ oder bc
und $df = db - ab$ oder fb } als Radius

subst. $ad^2 = (db+ab) \times (db-ab)$

$$ad^2 = db^2 - ab^2$$

$$ad^2 + ab^2 = db^2$$

§. 177. **Zusatz.** Was immer für zwo Tangenten eines Zirkels, die einander durchschneiden, haben, wie schon erwiesen worden, vom Berührungspunkte bis zum Durchschnittspunkt gleiche Länge; denn es ist Fig. 95

$$ab^2 = ac^2$$

$$ab = ac$$

§. 178. **Zusatz.** Daraus folget eine leichte Art wie in jeden Winkel ein Zirkel beschrieben werden könne, so daß er die beyden Schenkel berühre. Man theile nämlich Fig. 96 den Winkel in zween gleiche Theile o und m, und errichte auf einem gegebenen Punkt, z. B. b, einen Perpendikel bis an die Theilungslinie ac, so ist dieß der Radius welcher auf der Tangente ab perpendikulär seyn muß.

§. 179. **Aufgabe.** In jedes Dreyeck einen Zirkel so hinein zu beschreiben, daß die Seiten des Dreyecks Tangenten dieses Zirkels werden.

Auflö-

Anflösung. Man theile Fig. 97 ein Paar Winkel in zween gleiche Theile, lasse die Theilungslinien einander durchkreutzen und fälle aus diesem Durchschnittspunkte Perpendikel auf jede der Seiten herab, so werden diese Perpendikel gleich, folglich Radiusse ein und des nämlichen Zirkels seyn, und die Seiten werden eben darum §. 93 Tangenten vorstellen.

Satz.

$$cf = ch = cg$$

Beweis.

I $x = v$ als rechte Wink.
$y = z$ wegen der Theilung
also $o = m$
$cd = cd$
folglich $\Delta fcd \cong chd$
und $cf = ch$

II $\psi = \omega$
$s = r$
also $\phi = \lambda$
und weil $ac = ac$ so ist wieder
$\Delta afc \cong agc$ und
$cf = cg$
aber $cf = ch$

folgl. $cf = ch = cg$

§. 180. **Lehrsatz.** Ein Quadrat, in welches ein Zirkel beschrieben ist, ist noch einmal so groß als jenes, das sich in den nämlichen Zirkel selbst hinein schreiben läßt.

Erläuterung. Hier werden zwo Auflösungen vorausgesetzt, die also zuerst gezeigt werden müssen.

Das

Das erste zu bewerkstelligen ist nicht schwer: es dürfen z. B. Fig. 98 nur die Diagonalen in dem Quadrate gezogen werden, so weiß man, daß sie sich im Mittelpunkte der Figur halbieren. Hier wird also der Handzirkel eingesetzt, und bis zu der Mitte einer Seite eröffnet, so wird dieß der Radius des verlangten Zirkels seyn. Eben so leicht ist die zweyte Foderung. Man errichte nämlich auf einem gezognen Diameter zu beyden Seiten überall ein gleichschenklichtes Dreyeck, dessen Höhe der Radius ist: so hat man mehrmal das verlangte Quadrat. Leichtigkeits halber kann der Diameter des Zirkels mit einer Seite des größern Quadrats parallel laufen.

Satz.

$$f g^2 = 2 a d^2$$

Beweis.

$$a b^2 = a d^2 + d b^2$$

aber $a b = f g$ als Parallelen zwischen Parall.

Folglich $a b^2 = f g^2$

so ist auch $a d = d b$

und $a d^2 = d b^2$

Subst. $f g^2 = a d^2 + a d^2$

abgek. $f g^2 = 2 a d^2$

§. 181. **Zusatz.** Wenn man die Peripherie in etliche gleiche Theile abtheilt, welches durch Hilfe eines sogenannten Transportärs leicht geschehen kann, und zu diesen Bögen die Sehnen zieht, so erhält man reguläre Polygone: denn gleiche Bogen haben gleiche Sehnen; also sind fürs erste die Seiten alle gleich. Fürs zweyte bilden die Polygonwinkel lauter Peripherialwinkel, wo jeder zum Maaße die halbe Peripherie weniger einen solchen aliquoten Bogen erhält.

Satz. Fig. 99

$x = \frac{P}{2} - ad$; wo P die Peripherie und ad den Bogen bedeutet.

Beweis.

abc

~~abc~~ $= P - ad - dc.$

2

Aber $ad = dc.$ §. 158.

Subst. $abc = P - ad - ad = P - 2ad.$

:2 $\frac{abc}{2} = \frac{P}{2} - ad.$

Weil auch $\frac{abc}{2} = x$ §. 83.

So ist $x = P - ad.$

2

§. 182. Erkl. Wenn man aus dem Mittelpunkte des Zirkels, oder vielmehr des Polygons auf die Endpunkte einer Seite oder Sehne Radiusse zieht, so heißt ein solcher zwischen zween Radiussen eingeschloßner Winkel ein Zentriwinkel, zum Unterschiede der Polygonwinkel, die immer zwo und zwo Seiten des Polygons mit einander bilden.

§. 183. Zusatz. Es hat also jedes Polygon so viele Zentriwinkel als Seiten.

§. 184. Zusatz. Weil die Seiten lauter gleiche Sehnen sind, und gleiche Sehnen gleiche Bögen haben, so müssen nothwendig alle Zentriwinkel einander gleich seyn; indem ihr Maas ebenfalls gleich ist.

§. 185. Zusatz. Da ferner alle Winkel um einen Punkt 360° halten, so findet man den Inhalt eines solchen Zentriwinkels, wenn 360 durch die Anzahl der Seiten dividiert werden: also ist allgemein $c = \frac{360}{n}$

§. 186.

§. 186. **Lehrsatz.** Jeder Polygonwinkel ist gleich zween rechten Winkeln weniger dem Zentriwinkel.

Satz. Fig. 99

$$x = 180 - \frac{360}{n}$$

Beweis.

Es ist oben erwiesen worden, daß

$$x = \frac{P}{2} - dc$$

Aber $dc = \frac{360}{n}$

und $\frac{P}{2} = 180$

Subst. $x = 180 - \frac{360}{n}$

§. 187. **Anmerk.** Es kann dieß auch aus andern Gründen dargethan werden. Denn oberhalb ist gezeigt worden §. 77. daß die Winkel eines jeden Polygons, es mag regulär oder irregulär seyn, $180(n-2)$ Gerade betragen; folglich, wenn durch die Anzahl aller Seiten oder Winkel dividiert wird, so erhält man einen Polygonwinkel, also allgemein

$p = \frac{180(n-2)}{n}$ wo p jeden Polygonwinkel vorstellet.

$$p = \frac{180\,n - 360}{n}$$

$$p = 180 - \frac{360}{n}$$

§. 188. **Lehrsatz.** Die Seite eines regulären Sechseckes ist dem Radius gleich.

Satz. Fig. 100

$$ab = r$$

Beweis.

$x = \frac{360}{6} = 60$ als Zentriw.

also $o + m = 180 - 60 = 120$ §. 70.

$o = m$ §. 48.

Subst. $m + m = 120$

abgek. $2\,m = 120$

:2 $m = 60$

und so auch $o = 60$. Das Dreyeck a d b ist demnach gleichseitig, und daher

$a\,d = a\,b$

Aber $a\,d = r$

Folglich $a\,b = r$

§. 189. **Zusatz.** Es läßt sich also der Radius sechsmal an der Peripherie herumtragen.

§. 190. **Erkl.** Wenn aus dem Zentriwinkel auf die Seite ein Perpendikel herabgefällt wird, so heißt dieß die Höhe des Polygons.

§. 191. **Zusatz.** Wenn demnach a die Höhe des Polygons, l eine Seite, und n die Anzahl aller Seiten bezeichnet, so ist der Inhalt oder die Quadratur jedes regulären Polygons oder $q = \frac{n\,a\,l}{2}$; denn jeder Zentriwinkel bildet mit seiner Schlußseite ein Dreyeck, dessen Inhalt $\frac{a\,l}{2}$ ist, da nun so viele solcher Dreyecke im ganzen Polygone sind, als Seiten dasselbe hat, so ist richtig $q = \frac{n\,a\,l}{2}$

§. 192. **Lehrsatz.** Der Quadratinhalt eines Zirkels ist vollkommen gleich dem halben Produkte aus der Peripherie in den Radius.

Satz. Fig. 101

$q = \frac{p\,r}{2}$ Wo p die Peripherie und r den Radius vorstellt.

Beweis.

Jeder Zirkel läßt sich als ein reguläres Polygon von unendlich kleinen und vielen Seiten vorstellen. Es müssen also auch die Zentriwinkel unendlich klein seyn. Wenn nun aus selben ein Perpendikel auf die Seite, die ein unendlich kleiner Theil vou der Peripherie ist, nämlich $\frac{p}{\infty}$ herabgefällt wird, welche Seite ohne Irrthum für eine gerade Linie angenommen werden kann, so ist der Perpendikel nichts anders als der Radius selbst; folglich ist der Inhalt eines solchen Kleindreyecks $= \frac{p}{\infty} \times \frac{r}{2} = \frac{p\,r}{2\,\infty}$. Da es nun solcher Dreyecke unendlich viel, x giebt, so ist

$$q = \frac{\infty \times p\,r}{2\,\infty}$$

Der Bruch durch ∞ verkl. $q = \frac{p\,r}{2}$

§. 193. **Lehrsatz.** Wenn statt der Polygonhöhe der Radius des Zirkels gegeben wird, in welchen das Polygon hineinbeschrieben ist, so läßt sich der Inhalt desselben mehrmal bestimmen. Es ist, wenn alles übrige, wie vorher der

Satz. Fig. 100

$$q = \frac{n\,l}{2}\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$$

Beweis.

Beweis.

Man ziehe die Höhe des Polygons, um den Werth dafür zu finden.

Weil nun $a\,h = h\,b = \frac{l}{2}$

und $c\,h^2 = a\,c^2 - a\,h^2$, so ist

nach der Substitution $a^2 = r^2 - \frac{l^2}{4}$

$$a = \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$$

beyderseits mit der halben Grundlinie mult. $\frac{al}{2} = \frac{l}{2}\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$

Das ist in der Figur $\triangle\,acb = \frac{l}{2}\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$

Mit der Anzahl aller Dreyecke mult. $n\triangle\,acb = \frac{nl}{2}\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$

Das ist $q = \frac{nl}{2}\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$

§. 194. **Anmerk.** In der ebnen Trigonometrie, wie wir erfahren werden, kann von diesen drey gegebnen Stücken immer eins wegbleiben, und der Inhalt läßt sich dem ungeachtet genauer noch als hier berechnen.

§. 195. **Anmerk.** Man kann auch jedes reguläre Polygon durch die Figurenwandlung in ein Dreyeck verzeichnen, welches ihm völlig am Inhalte gleich kömmt. Die Bewerkstelligung hievon ist diese: Man ziehe Fig. 102 eine unbestimmte gerade Linie von ziemlicher Länge; setze am äußersten Endpunkt, oder auch in der Mitte die Polygonhöhe von Fig. 101 rechtwinklicht darauf; schneide auf dieser unbestimmten Linie, vom Perpendikel aus, alle Polygonseiten nach und nach ab, und ziehe allemal wieder die Hypothenuse, so ist jedes Dreyeck einem Zentriwinkeldreyeck dem Inhalte nach gleich; indem sie einerley Grundlinie und Höhe haben, und weil alle am Ende nur ein einziges Dreyeck formen, so ist nothwendig dieses Dreyeck der Inhalt des Polygons selbst. Es erhellet dann mehrmal daraus, daß, weil die Grundlinie dieses Dreyeckes $= nl$ und die Höhe $= a$ ist, der Quadratinhalt d. i. $q = \frac{anl}{2}$ seyn müsse.

Obgleich diese Verzeichnung bey einem Zirkel, der ein Polygon von unendlich kleinen und vielen Seiten ist, gar zu mühsam läßt, und weder unsere Sinne, noch unsere Werk-

zeuge

zeuge dazu fein genug sind, so findet doch der Verstand die Sache sehr wohl möglich, und man kann daher mit aller Richtigkeit sagen: Jeder Zirkel sey einem Dreyecke vollkommen gleich, dessen Grundlinie die Peripherie und die Höhe der Radius ist.

§. 196. **Lehrsatz.** Je kleiner eine Sehne im nämlichen Zirkel ist, desto näher kömmt sie auch an Länge ihrem Bogen.

Beweis.

Man ziehe eine Sehne im Zirkel, wo man will, z. B. Fig. 103 a c, so ist diese der kürzeste Weg zwischen ihren Endpunkten a und c, folglich muß der Bogen, als eine krume Linie, länger seyn als die Sehne. Natürlich muß nun auch der halbe Bogen a d b länger als die halbe Sehne a h seyn, wenn beede zuvor durch einen Perpendikel, das ist durch den Radius getheilt worden, wie hier durch f b. Wenn nun für diesen halben Bogen eine Sehne gezogen werden kann, die größer als die vorige halbe Sehne ist, so muß sie nothwendig ihren Bogen an Länge näher kommen, als die erste. Aber a b ist die Hypothenuse und a h eine Lothe im nämlichen Dreyecke; folglich ist sie größer, und eben darum dem Bogen näher an Länge. Wird nun auch diese wieder halbiert und mehrmals eine neue gezogen, so verhält sichs auf gleiche Weise.

§. 197. **Zusatz.** Durch fortgesetzte Halbierungen also, kann man endlich eine Sehne erhalten, die ihrem Bogen an Länge so nahe kömmt, als man nur verlangt.

§. 198. **Zusatz.** Daraus nun wird begreiflich, wie in dem nämlichen Zirkel die Anzahl

der Seiten des hineinbeschriebnen Polygons verdoppelt werden: das heißt, wie z. B. aus einem Viereck ein Achteck entstehen könne. Es darf nur jede Seite samt dem Bogen auf die vorige Art in gleiche Theile getheilt werden, so geben die Sehnen der halbierten Bögen, weil sie alle gleich sind, die Seiten eines Vieleckes ab, das noch so viel Seiten zählt.

§. 199. **Lehrsatz.** Wenn die Seite eines Polygons $= l$, der Radius des Zirkels $= r$, und die Seite des neuen Polygons von noch so vielen Seiten $= \lambda$ ist, so heißt der

Satz.

$$\lambda = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}l^2}}$$

Beweis.

Es sey Fig. 103 $df = fb = r$ $\quad dm = x$
$ab = l$ $\quad fm = 1 - x$
$am = mb = \frac{l}{2}$
$db = \lambda$

Nun ist

I $\quad md^2 = db^2 - mb^2$ d. i.
$x^2 = \lambda^2 - \frac{l^2}{4}$
und $x = \sqrt{\lambda^2 - \frac{l^2}{4}}$

II $\quad fm^2 = fb^2 - mb^2$
$(1-x)^2 = 1 - \frac{l^2}{4}$
$1 - x = \sqrt{1 - \frac{l^2}{4}}$
$1 - \sqrt{1 - \frac{l^2}{4}} = x$

III

III $\sqrt{\lambda^2 - \frac{l^2}{4}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{l^2}{4}}$

$\lambda^2 - \frac{l^2}{4} = 1 - 2\sqrt{1 - \frac{l^2}{4}} + 1 - \frac{l^2}{4}$

$\lambda^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{l^2}{4}}$

$\lambda = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{l^2}{4}}}$

§. 200. **Zusatz.** Will man dieß alles dahin anwenden, um zu erforschen, welches Verhältniß der Radius, oder der Diameter eines Zirkels zu seiner Peripherie habe, so darf nur das reguläre Sechseck zum Grunde gelegt werden, weil hier die Seite selbst ein Radius ist. Sucht man nun nach und nach aus selbem andere Polygone von 4, 8, 16 mal so viel Seiten u. s. f., so kömmt man zuletzt auf ein Polygon, das in kleinen Zirkeln beynahe ganz mit der Peripherie übereinfällt, und die man ohne erheblichem Irrthum für die Peripherie selbst annehmen darf. Wird die Rechnung noch weiter fortgeführt, so erhält man auch die Peripherien für größere Zirkel.

Es verwandelt sich demnach die allgemeine Formel $\lambda = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{l^2}{4}}}$ für das Zwölfeck, weil $l = r = 1$, in diese nun

$\lambda = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}$

$\lambda = \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}}}$

$\lambda = \sqrt{2 - \frac{2\sqrt{3}}{2}}$

$\lambda = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Will man die Seite für das Vierundzwanzigeck so ist $l = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, und $l^2 = 2 - \sqrt{3}$.

Daß

Das nun wieder in der allgemeinen Formel substituiert giebt

$$\lambda = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4}}}$$

$$\lambda = \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{4 - 2 + \sqrt{3}}{4}}}$$

$$\lambda = \sqrt{2 - \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}}$$

$$\lambda = \sqrt{2 - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

Wenn man wieder für 1 in der allgemeinen Formel $\sqrt{2 - \sqrt{2+\sqrt{3}}}$ setzt, so überkömmt man die Seite des Achtundvierzigeckes.

Weil nun $1^2 = 2 - \sqrt{2+\sqrt{3}}$

so ist $\lambda = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}}}$

$$\lambda = \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{4 - 2 + \sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}}}$$

$$\lambda = \sqrt{2 - \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{2+\sqrt{3}}}}{4}}$$

$$\lambda = \sqrt{2 - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}}$$

So geht die Rechnung nun ohne Ende fort. Mit jeder Verdopplung wächst die Formel um eine positive Wurzel aus 2, und das erste Minuszeichen bleibt immer an seinem Orte. Wird so eine Seite wirklich nach Anweisung der Formel berechnet, zum Beysp. für das Achtundvierzigereck, so erhält man 0,13089...., Weil aber in der Peripherie 48 solche Seiten herum liegen, so ist selbe = 0,13089×48 = 6,28272. Folglich ist in kleinen Zirkeln das Verhältniß des Radius zur Peripherie wie 1 : 6,282 u. s. f., und weil dieß das halbe Verhältniß zum

Diame-

Diameter, einer noch so großen Linie, ist, so muß nothwendig das Verhältniß des Diameters zur Peripherie wie $1 : \frac{6,282}{2} = 1 : 3,1416$ seyn.

§. 201. **Anmerk.** Man sieht von selbst, daß dieses Verhältniß immer näher und näher gefunden werden könne, je größer man die Verdopplung annimmt, und jemehr man bey Ausziehung der Wurzeln Decimalen herausbringt. Uns genügt hier bloß den Weg in der Elementargeometrie gezeigt zu haben, worauf Ludolph von Köln diese Verhältniß in 30 Decimalen gefunden. In der höhern Mathematik wollen wir auch andere Wege, die von diesem ganz verschieden sind, versuchen, und wir werden zur nämlichen Wahrheit gelangen.

§. 202. **Willkührl. Satz.** Wir wollen in der Folge das gefundene Verhältniß des Diameters zur Peripherie $1 : 3,14$, oder bey größern Zirkeln $1 : 3,1415926$ u. s. f. durch $1 : \pi$ ausdrücken. Wo demnach π in einer Formel oder Beweis vorkömmt, bedeutet es allemal die Zahl 3, 14 mit so viel Decimalen, als man will; außer es wird etwas anders dabey erinnert.

§. 203. **Lehrsatz.** Die Peripherie eines jeden Zirkels dessen Diameter mehr oder weniger als 1 beträgt, ist gleich dem doppelten Produkte, aus dem Radius in die Zahl 3, 14 : oder dem Produkt aus dem Diameter in die obige Zahl.

Satz

$$p = 2r\pi = d\pi$$

Beweis.

Es ist früher oben §. 152. erwiesen worden, daß in ähnlichen Figuren gleichnamige Linien im Verhältniße stehen; da nun alle Zirkel einander ähnlich

sind,

sind, und Radius, Diameter und Peripherie in verschiedenen Zirkeln die nämlichen Namen führen, so ist in zweenen Zirkeln, wovon einer die Einheit zum Diameter hat.

$$1 : \pi = 2r : p$$
$$\text{also} \quad p = 2r\pi$$
$$\text{und weil} \quad 2r = d$$
$$\text{auch} \quad p = d\pi$$

§. 204. **Anmerk.** Diese Art ist kürzer, aus einem gegebnen Radius oder Diameter seine Peripherie zu suchen, als die gewöhnlichen durch die Proportion oder Regel Detri. Denn man darf nichts weiter als die Zahl 3, 14 mit dem gegebnen Diameter multiplicieren. Z. B. wenn er 12 Schuhe ist, so entspricht ihm eine Peripherie von $3,14 \times 12 = 37,68$ Schuhen. Die Rechnung ist also zu Ende, ohne erst eine von den Proportionen $100 : 314 = 12 : x$, oder $113 : 355 = 12 : x$ oder $7 : 22 = 12 : x$ anschreiben gemüßt zu haben. Zudem ist das zweyte Verhältniß 113 : 355, welches Adrian Metius gefunden, etwas unrichtig, und noch unrichtiger des Archimedes seines 7 : 22. Denn löset man sie in Decimalen auf, so weichet jenes in der 7ten, und dieses schon in der 3ten Decimalstelle von dem Ludolphischen Verhältniße, als dem wahren Probierstein aller übrigen, ab.

§. 205. **Lehrsatz. Die Fläche eines Zirkels ist gleich dem Produkte aus dem Quadrat des Radius in die Zahl 3, 14**

Satz.

$$q = r^2\pi$$

Beweis.

Es ist dargethan worden, daß im Zirkel

$$q = \frac{r\,p}{2}$$

$$\text{aber} \quad p = 2r\pi$$
$$\text{subst.} \quad q = \frac{r \times 2r\pi}{2}$$
$$\text{abgek.} \quad q = \frac{2r^2\pi}{2} = r^2\pi$$

§. 206. **Zusatz.** Will man eine Formel für den Quadratinhalt des Zirkels haben, wo statt des Radius, der Diameter in die Rechnung gezogen wäre, so darf man nur bedenken, daß $r = \frac{d}{2}$ folgl. $r^2 = \frac{d^2}{4}$ sey. Dieß nun substituiert giebt $q = \frac{d^2 \pi.}{4}$ Oder soll gar statt dem Radius oder dem Diameter die Peripherie in der Formel erscheinen, so ist

weil $p = 2 r \pi$

Dann $\frac{p}{2\pi} = r$

und endlich $\frac{p^2}{4\pi^2} = r^2$,

nach der Substitution $q = \frac{p^2 \pi}{4 \pi^2}$

abgek. $q = \frac{p^2}{4 \pi}$

§. 207. **Zusatz.** Jeder sieht von selbst, wie auch umgekehrt aus dem Inhalte des Zirkels der Diameter oder der Radius gefunden werden könne. Man nehme nur die Gleichung her $q = \frac{d^2 \pi}{4}$, und suche d besonders. Es ist erstens

$4 q = d^2 \pi$

$: \pi \quad \frac{4 q}{\pi} = d^2$ und endlich

$\sqrt{} \quad 2 \sqrt{\frac{q}{\pi}} = d$

Eben so läßt sich auch aus dem Inhalte des Zirkels seine Peripherie finden. Denn $q = \frac{p^2}{4 \pi}$

$4 q \pi = p^2$

folglich $2 \sqrt{q \pi} = p$

§. 208. **Lehrsatz.** Die Flächeninhalte zweener Zirkel verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radiusse oder ihrer Diameter, oder auch ihrer Peripherien. Der Beweis wäre eben nicht nöthig; denn es ist schon oben erhärtet worden, daß sich die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten, wie die Quadrate ähnlich liegender, oder gleichnamiger Linien, folglich gilt dieß auch von Zirkeln: allein, weil er sich kurz auch anders vortragen läßt, so wollen wir ihn hieher setzen.

Satz.

$$q : Q = r^2 : R^2$$
$$\text{oder} = d^2 : D^2$$
$$\text{oder} = p^2 : P^2$$

Beweis.

I $q = r^2 \pi$, $Q = R^2 \pi$ } also $q : Q = r^2 \pi : R^2 \pi$ π:
$q : Q = r^2 : R^2$

II $q = \frac{d^2 \pi}{4}$

$Q = \frac{D^2 \pi}{4}$

$q : Q = \frac{d^2 \pi}{4} : \frac{D^2 \pi}{4}$ 4×

$q : Q = d^2 \pi : D^2 \pi$ π:

$q : Q = d^2 : D^2$

III $q = \frac{p^2}{4\pi}$ §. 206.

$Q = \frac{P^2}{4\pi}$

$q : Q = \frac{p^2}{4\pi} : \frac{P^2}{4\pi}$ 4π×

$q : Q = p^2 : P^2$ §. 209.

§. 209. **Lehrsatz.** Der Inhalt eines Sektors ist das Produkt aus der Gradenanzahl des Bogens in das Quadrat des Radius und der Zahl 3, 14, alles dividiert durch 360. Es heiße die Anzahl der Graden = a, so gilt der

Satz.

$$q = \frac{a\ r^2\ \pi}{360}$$

Beweis.

Es sey das Längenmaas des Bogens = x

$$a : 360 = x : p$$

aber $p = 2\,r\,\pi$

$$a : 360 = x : 2\,r\,\pi$$

$$2\,a\,r\,\pi = 360\,x$$

$$\frac{2\,a\,r\,\pi}{360} = x$$

Nun läßt sich ein Sektor gerade so dem Verstande nach in ein Dreyeck verwandeln, wie der Zirkel selbst. Die Höhe des Dreyecks wird wieder der Radius seyn, und die Grundlinie der Bogen im Längenmaase, also ist überhaupt

$$q = \frac{x \times r}{2} \quad \text{für } x \text{ subst.}$$

$$q = \frac{2\,a\,r\,\pi}{360} \times \frac{r}{2}$$

$$q = \frac{2\,a\,r^2\,\pi}{2 \times 360} = \frac{a\,r^2\,\pi}{360}$$

§. 210. **Anmerk.** Segmente können zwar ebenfalls geometrisch berechnet werden; denn man darf nur den ganzen Sektor finden, der dem Bogen entspricht, und dann das Dreyeck, welches von den Radiussen und der Sehne bestimmt wird, abziehen. Allein in der Trigonometrie läßt sich das weit füglicher

licher leisten. Dort ist es genug, wenn ich die Länge der Sehne und die Anzahl der Grade des Bogens weiß: hier muß mir auch nebenher noch der Radius bekannt seyn. Ueberhaupt fodert der Geometer alle drey Stücke als gegeben, da die Trigonometrie was immer für zwey nur von selben verlanget; denn das dritte bestimmt sich selbst; es kann also gewiß nicht so richtig gegeben als berechnet werden.

§. 211. **Erkl.** Wenn die Flächen verschiedner Zirkel in einander liegen, wenn die Lage auch eben nicht konzentrisch ist, so wird ihre Flächendifferenz ein Ring genennt.

§. 212. **Lehrsatz.** Der Inhalt eines solchen Ringes ist das Produkt aus der Differenz der quadrierten Radiusse beyder Zirkel in die Zahl 3, 14.

Satz. Fig. 104

$$\text{annul.} = (R^2 - r^2)\,\pi$$

Beweis.

$$Q = R^2\,\pi$$
$$q = r^2\,\pi$$
$$Q - q = R^2\,\pi - r^2\,\pi$$
$$\text{aber } Q - q = \text{annul.}$$
$$\text{also annul.} = R^2\,\pi - r^2\,\pi$$
$$\text{anders ausgedrückt. annul.} = (R^2 - r^2)\,\pi$$

§. 213. **Lehrsatz.** Wenn man sowohl auf die Diagonal eines Quadrats, als auf eine ihrer Seiten, Zirkel beschreibt, so läßt sich ein solches mondenförmiges Stück, das bey der Durchschneidung gebildet worden, vollkommen quadrieren: Es ist nämlich dem vierten Theil des Quadrats gleich.

Satz.

$$\text{☾} = \tfrac{1}{4}\, a\, d^2$$

Beweis.

$$a\,g^2 = a\,d^2 + d\,g^2$$

aber $a\,d = d\,g$

folglich $a\,d^2 = d\,g^2$

subst. $a\,g^2 = a\,d^2 + a\,d^2$

abgek. $a\,g^2 = 2\,a\,d^2$

in der Figur $\text{Diam.}^2 = 2\ \text{diam.}^2$

Aber $D^2 : \text{Circ} = d^2 : \text{circ}$ §. 208. $\times 2$

$D^2 : C = 2\,d^2 : 2\ \text{circ}$

subst. $2d^2 : C = 2\ d^2 : 2\ \text{circ}$

$2d^2 \times 2\ \text{circ} = 2\ d^2 \times \text{Circ}$

$:2\,d^2 \qquad 2\ \text{circ} = \text{Circ}$

$:4 \qquad \frac{\text{Circ}}{4} = \frac{2\ \text{circ}}{4} = \frac{\text{circ}}{2}$

In der Figur $a\,c\,d\,f = a\,b\,d\,m$

aber $_\ a\,c\,d\,m = _\ a\,c\,d\,m$

$a\,c\,d\,f - a\,c\,d\,m = a\,b\,d\,m - a\,c\,d\,m$

In der Figur $a\,d\,f = \text{☾}$

aber $a\,d\,f = \frac{1}{4}\, a\,d^2$

also $\text{☾} = \frac{1}{4}\, a\,d^2$

§. 214. **Anmerk.** Man nennt dieses mondenförmige Stück von dem Erfinder seiner Quadratur, der ein verunglückter Kaufmann, aber ein um so glücklicherer Mathematiker war, Lunulam Hippocratis. So sehr dieser Satz von einem spekulativen Kopfe zeuget, so wenig ist er doch zur Quadratur des Zirkels verhilflich; weil man nie berechnen kann, der wievielte Theil so ein mondenförmiges Stück vom ganzen Zirkel sey. Indeß mag er wohl zu andern Erfindungen Anlaß geben; weswegen ihn auch viele Mathematiker mit in ihre Schriften aufnehmen, um ihn unter der spekulativen Welt fortzupflanzen.

Bayerische Staatsbibliothek München

Stereometrie.

§. 215. Erkl. Jener Theil der Elementar-geometrie, welcher sich mit mathematischen Körpern beschäftigt, wird von dem Worte Στερεος, ein Solidum oder Körper, Stereometrie genennet.

§. 216. Erkl. Körper können regulär oder irregulär seyn. Regulär sind jene, die in lauter reguläre Flächen, als in Parallelograme, gleichseitige Dreyecke, und reguläre Polygone eingeschlossen sind, oder höchstens noch, wenn zwo parallellaufende Flächen gleiche Irregulärität haben. Irregulär, wenn sie von irregulären Flächen begränzt sind. Jene Fläche aber, worauf man sie sich stehend vorstellt, heißt die Grundfläche eines Körpers. Die regulären Körper können ferner von ihrer Grundfläche an immer gleiche Dicke beybehalten, oder sie können sich zuspitzen, oder sich in eine Schneide enden, oder endlich in mehrere Spitzen und Schneiden auslaufen. Zur ersten Gattung gehören Prismen und Walzen; zur zweyten Pyramiden und Kegel; znr dritten keilartige Körper, die aber, wenn man sie gehörig wendet, allemal wieder Prismen vorstellen, zur vierten Tetraedren, Oktaedren, Ikosaedren und Dodekaedren, ferner abgestutzte Kegel und Pyramiden, und in einem gewissen Sinne auch die Kugel.

Ein von zwo gleichen Grundflächen, und eben so viel Parallelogramen, als jene Seiten haben, eingeschloßner Körper heißt ein Prisma Fig. 106: daher dreyeckichte Prismen, wenn die Grundfläche ein Dreyeck, oder Parallelepipeden, wenn die Grundfläche ein Parallelogram ist Fig. 107, oder

Kubus-

Kubusse, wenn alle einschließenden Flächen Quadrate sind Fig. 108; die übrigen heißen fünf- sechs- siebeneckichte Prismen u. s. f. Sind die Grundflächen Unendlichecke, so hat man Walzen, (Cylinder) Fig. 109. Ein von einer Grundfläche und eben so vielen Dreyecken, als jene Seiten hat, eingeschloßner Körper, heißt eine Pyramide Fig. 110. Hat die Grundfläche unendlich viele Seiten, das heißt, ist sie ein Zirkel, so ist der Körper ein Kegel (Conus) Fig. 111. Die übrigen Körper können alle betrachtet werden, als wenn sie aus Pyramiden zusammgesetzt wären; gerade so, wie jedes Polygon aus Dreyecken zusammgesetzt ist.

§. 217. **Erkl.** Ein körperlicher Winkel ist die Zusammneigung mehrerer geradlinichten Flächen in einem Punkte. Und weil zusammneigende Flächen, da wo sie sich fügen, durch Linien begränzt sind, welche beym nämlichen Punkt in ebne Winkel sich enden, so ist jeder körperliche Winkel eine Zusammensetzung von ebnen Winkeln.

§. 218. **Zusatz.** Ein körperlicher Winkel muß wenigst 3 Flächen haben; denn zwo Flächen, die sich gegen einander neigen, verlieren sich in keinen Punkt, sondern in eine Schneide, sobald aber eine dritte hinzukömmt, enden sich die Flächen in einen gemeinschaftlichen Punkt, wie z. B. bey den Ecken eines Zimmers.

§. 219. **Erkl.** Reguläre Körperpolygone sind jene, die lauter gleiche einschließende Flächen, und gleiche Körperwinkel haben. Im widrigen Falle sind sie irregulär. Neben dem Kubus, den wir schon erklärt haben, giebt es

1) das Tetraedrum Fig. 112, welches von 4 gleichseitigen gleichen Dreyecken eingeschloßen wird, folglich auch für eine gleichseitige Pyramide gelten kann. Weil nun in gleichseitigen Dreyecken jeder Winkel 60° hält, und drey solche Winkel zusammstossen, so beträgt ein körperlicher Winkel des Tetraedrums $3 \times 60 = 180°$.

2) Das Oktaedrum Fig. 113 Nro I, das von 8 gleichseitigen gleichen Dreyecken eingeschlossen ist. Der Winkel hält überall $4 \times 60 = 240°$.

3) Das Ikosaedrum Fig. 113 Nro II, ist in 20 solche gleiche Dreyecke eingeschränkt. Der Winkel faßt folglich $5 \times 60 = 300°$.

4) Das Dodekaedrum Fig. 114, welches 12 reguläre Fünfecke begränzen. Weil nun ein Fünfeckswinkel $= 180 - \frac{360°}{5} = 180 - 72 = 108°$ hält, und drey solche ebne Winkel den Körperwinkel geben, so ist dieser $108 \times 3 = 324°$.

§. 220. **Zusatz.** Mehrere reguläre Körper giebt es nicht. Denn man setze Winkel von regulären Flächenfiguren zusamm, welche man will; so werden sie allemal 360° oder darüber geben. Weil aber bekannt ist, daß 360° um einen Punkt herum in die Ebne fallen, so können diese keinen Körperwinkel geben; und mehr als 360° würden einen unmöglichen Körperwinkel geben.

§. 221. **Erkl.** Die Kugel, welche entsteht, wenn sich ein Halbzirkel um den Diameter ganz herum bewegt, ist ein Polyedrum von unendlich vielen und kleinen einschließenden Vieleckchen, welche die runde Oberfläche der Kugel bestimmen.

§. 222.

§. 222. Zusatz. Weil sich alle reguläre Körper, wie wir oben sagten, in Pyramiden, die eine solche einschließende Fläche zur Basis, und den halben Diameter zur Höhe haben, zerfällen lassen, so ist auch die Kugel nichts anders als eine Zusammsetzung von unendlich schmalen Pyramiden, die zur Höhe den Radius haben, und deren Spitzen alle sich im Mittelpunkt befinden, folglich ihre sämmtlichen Grundflächen die Oberfläche der Kugel geben. Wenn wir nun in Staude gesetzt sind, eine Pyramide zu berechnen, so lassen sich die Tetraedren, Oktoedern u. s. f., ja selbst die Kugel, leicht nach kubischem Maase bestimmen.

§. 223. Lehrsatz. Parallelepipeden von einerley Höhe und Grundfläche (Basis) sind einander gleich.

Beweis.

Man lege die Körper auf jene Parallelogramseiten, die einerley Höhe und Grundfläche haben, so werden diese gleich seyn. Stelle man sich ferner vor, jeder dieser Körper bestehe aus lauter solchen aufeinander liegenden Flächen oder Lamellen, wie z. B. ein Buch aus aufeinander liegenden Blättern, so werden alle Flächen des Körpers A Fig. 115 den Flächen des Körpers B gleich seyn. Weil nun ferner diese Körper gleiche Höhe haben, so müssen auch bey jedem gleich viel solcher Lamellen seyn; woraus nothwendig folgt, daß selbst die Körper gleich sind.

§. 224. Zusatz. Jedes Parallelepipedum läßt sich durch einen Diagonalschnitt der Grundfläche in zwey gleiche Prismen theilen; denn man kann sich vorstellen, daß das Parallelepipedum aus lauter auf-

ein-

einanderliegenden Parallelogramen bestünde: weil nun diese alle in gleiche Theile getheilt werden, so wird es eben darum auch der Körper, dessen Bestandtheile jene waren. Eben so lassen sich auch vieleckichte Prismen in so viel dreyeckichte, durch solche Diagonalschnitte theilen, die einander nicht durchkreuzen, als die Grundfläche Seiten hat weniger zwey.

§. 225. **Lehrsatz.** Jedes dreyeckichte Prisma läßt sich durch zween schiefe Schnitte von einem Ecke zu zwey andern in drey gleiche Pyramiden zertheilen. Fig. 116. Der Beweis kann am deutlichsten bey der wirklichen Zerschneidung selbst geführt werden. Es werden nämlich bey den drey Pyramiden zwey dabey seyn, die völlig einander gleich und ähnlich sind. Man nehme nun zu der dritten Pyramide eine solche von den zweyen zu Hilfe, die ein und die nämliche diagonalartig zerschnittene Seite miteinander haben, und die sich, wenn man sie beyde auf diese Seitenflächen legt, in eine gemeinschaftliche Spitze enden, so werden auch diese zwey Pyramiden wegen gleicher Höhe und Grundfläche gleichen Inhalt in sich fassen. Sind nun zwey Dinge einem dritten gleich, so sind es alle drey unter sich selbst; also müssen nothwendig die drey Pyramiden einander gleich seyn. Einen schärfern, algebraischen Beweis wollen wir von diesem wichtigen Lehrsatze bey der Differentialrechnung vortragen.

§. 226. **Zusatz.** Eine dreyeckichte Pyramide ist demnach der dritte Theil eines Prisma, das mit ihr gleiche Höhe und Grundfläche hat. Ueberhaupt genommen, ist jede Pyramide der dritte Theil jedes Prisma, es mag so viel Ecke in der Grundfläche haben als es wolle, wenn nur der Inhalt dieser

Grund-

Grundfläche sammt der Höhe überall die nämliche ist; weil sich gleiche Flächen doch endlich in gleiche Dreyecke verwandeln lassen.

§. 227. **Zusatz.** Weil Kegel als Pyramiden, und Walzen als Prismen von unendlicheckichten Grundflächen angesehen werden können, so ist auch der Kegel der dritte Theil der Walze von einerley Grundfläche und Höhe.

§. 228. **Erkl.** Ein Körper wird ausgemessen, wenn ein anderer zur Einheit, oder zum Maase angenommener Körper so oft in dessen Raume herum gelegt wird, als es angeht.

§. 229. **Zusatz.** Wie bey Flächen das schicklichste Maas ein Quadrat war, so ist es hier der Kubus; das ist, ein Körper, der von sechs Quadratflächen umschlossen ist.

§. 230. **Lehrsatz.** Der Inhalt eines jeden Prisma ist das Produkt aus der Grundfläche in die Höhe.

Beweis.

Auf der Grundfläche können gerade so viel Kubikmaase z. B. Schuhe stehen, als Quadratfüsse dieselbe in sich faßt: folglich ist die Anzahl der Kubikfüsse einerley mit den Quadratschuhen der Grundfläche. Ferner, so viel Längenschuhe das Prisma hoh ist, so oft ist auch diese Schichte der Kubikschuhe in dem ganzen Prisma enthalten, das heißt aber nichts anders, als die Grundfläche mit der Höhe multiplicieren. Was hier zu erweisen war.

§ 231. **Zusatz.** Weil jedes schiefstehende Prisma einem senkrechten Prisma gleicht, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, so wird auch desselben Kubatur gefunden, wenn die Grundfläche mit der Höhe, das ist mit dem Perpendikel multipliciert wird.

§. 232. **Zusatz.** Wir dörfen nimmer erinnern, daß Zylinder auch mit unter die Rubricke von Prismen gehören, folglich ebenfalls so berechnet werden müssen.

§. 233. **Zusatz.** Der Inhalt der Pyramiden, folglich auch der Kegel, wird gleichfalls so gefunden, wenn man Grundfläche mit der Höhe multipliciert, aber am Ende durch 3 das Produkt dividiert; weil sie der dritte Theil von jenen Körpern sind, die mit ihnen Höhe und Grundfläche gemein haben. §. 227.

§. 234. **Anmerk.** Eine hieher gehörige Aufgabe fürs Praktische. Der kleinste von den zu Rom befindlichen 5 ägyptischen Obelisken, welcher auf dem Platze vor der Minerva steht, hält (nach Ostertags Abhandlung über Roms gnomonischen Prachtkegel) $16\frac{1}{2}$ Fuß Höhe, und unten 26 Zoll $= 2\frac{1}{6}$ Fuß (vermuthlich Parisermaas) ins Gevierte. Wie viele Kubikschuh beträgt seine Solidität?

Auflösung. Weil die Basis dieser Pyramide ins Gevierte geht, und eine Seite derselben $2\frac{1}{6}$ Schuh mißt, so hält sie selbst $(2\frac{1}{6})^2 = (\frac{13}{6})^2 = \frac{169}{36}$ Quadratschuh; dieß nun mit dem dritten Theil der Höhe multipliciert giebt $\frac{169}{36} \times \frac{16\frac{1}{2}}{3}$

$$= \frac{169}{36} \times \frac{33}{6} = \frac{169}{36} \times \frac{11}{2} = \frac{1859}{72} = 25\frac{59}{72}$$

oder 25′,819″ Kubikinhalt.

§. 235. **Zusatz.** Bey keilartigen Körpern darf das Produkt aus der Grundfläche in die Höhe bloß halbiert werden; weil ein Parallelepipedum durch einen Diagonalschnitt sich in zween solche Körper zerfällen

fällen läßt, welche nachher bey der nämlichen beybehaltnen Grundfläche und Höhe, in Rücksicht der Neigung zur gemeldten Grundfläche, verschieden modificiert werden können.

§. 236. **Lehrsatz.** Der körperliche Inhalt eines parallel mit der Grundfläche abgestutzten Kegels ist gleich dem Produkt aus der Differenz der kubierten Radiusse in die Höhe und in die Zahl 3, 14, dieß alles durch die dreyfache Differenz der Radiusse dividiert; das ist wenn der körperliche Inhalt (Soliditas) = S, die Höhe = a, die beyden Radiusse = R und r sind, so heißt der

Satz

$$S = \frac{(R^3 - r^3)\ a\ \pi}{3\ (R - r)}$$

Beweis.

Man ergänze den Kegel wirklich, ziehe mit der Achse desselben eine Parallellinie vom Endpunkte des kleinen Diameters bis auf den großen, so ist, wenn Fig. 117 nachher die Verlängerung der Höhe b f = x heißt, und, weil h k = c f, für gh = R — r gesetzt wird.

$$gh : gk = ch : bk \quad \text{§. 143.}$$

subst. $(R - r) : R = a : (a + x)$

$$aR + Rx - ar - rx = aR$$

$$Rx - rx = ar$$

$$x = \frac{ar}{R - r}$$ die Höhe des mangelnden Kegelstücks

Folg-

Folglich $a + \frac{ar}{R-r} = \frac{Ra - ra + ra}{R-r}$

$= \frac{Ra}{R-r}$ die völlige Höhe des ergänzten Kegels.

Wenn nun diese beyden Höhen mit ihren Grundflächen, welche $r^2\pi$ und $R^2\pi$ sind, multipliciert, und durch drey dividiert werden, so erhält man beyde Körper; welche, von einander abgezogen, den abgestutzten Kegel geben. Es heiße der ergänzte Kegel $= C$ und das mangelnde Kegelstück $= c$ so wird die Rechnung diese seyn.

$$C = R^2\pi \times \frac{\frac{Ra}{R-r}}{3} = \frac{R^3 a\pi}{3(R-r)}$$

$$c = r^2\pi \times \frac{\frac{ar}{R-r}}{3} = \frac{r^3 a\pi}{3(R-r)}$$

$$C-c = \frac{R^3 a\pi - r^3 a\pi}{3(R-r)} = \frac{(R^3-r^3)\,a\pi}{3(R-r)}$$

oder $$S = \frac{(R^3-r^3)\,a\pi}{3(R-r)}$$

§. 237. **Zusatz.** Auf eine ähnliche Art läßt sich auch eine Formel für abgestutzte Pyramiden finden.

§. 238. **Lehrsatz.** Die Kugel ist zween Drittheilen einer Walze gleich, die mit ihr einerley Grundfläche und Höhe hat. Man versteht aber unter der Grundfläche die größte Zirkularfläche, die nämlich durch den Mittelpunkt der Kugel geht; und unter der Höhe, den Diameter derselben. Wenn wir

die

die Kugel (Sphaera) durch S, und den Zylinder oder Walze durch C ausdrücken, so heißt der

Satz

$$S = \frac{2}{3} C$$

Beweis.

Man beschreibe ein Quadrat Fig. 118, ziehe eine Diagonal, und aus einem Endpunkte derselben mit der Seite des Quadrats einen Quadranten, so wird eines der rechtwinklichten Dreyecke, der Quadrant selbst, und das Quadrat eine gemeinschaftliche Linie haben. Stellt man sich nun ferner vor, es bewegen sich alle drey Figuren zugleich um diese Linie, als um ihre gemeinschaftliche Achse; so wird das rechtwinklichte Dreyeck einen Kegel, der Quadrant eine halbe Kugel, und das Quadrat einen Zylinder beschreiben, der die Höhe von der halben Kugel hat, folglich auch für einen halben Zylinder zu halten ist: wir wollen ihn $c = \frac{1}{2} C$, so wie den Kegel k nennen. Man ziehe endlich durch die Figur eine Parallellinie mit der Basis des Kegels wo man will, und einen Radius an jenen Punkt hin, wo diese Parallellinie die Peripherie durchschnitten hat; so giebt es folgende Rechnung ab.

$df^2 = gf^2 - dg^2$. §. 118. Für gf^2 und dg^2 andere Werthe gesucht.

I $gf = gh$ als Radius
$dc = gh$ wegen Zwischenparalleln

also $gf = dc$ und
$gf^2 = dc^2$

II $dg : dl = ga : ab$

aber $ga = ab$

subst. $dg : dl = ab : ab$

$dg \times ab = dl \times ab$

$:ab \qquad dg = dl$

und $dg^2 = dl^2$

In der ersten Hauptgleichung substituiert, so wird $df^2 = dc^2 - dl^2$

Es sind aber df, dc und dl nichts anders als Radiusse der Durchschnittslamellen von der Kugel, von dem Zylinder und dem Kegel. Es verhalten sich aber die Quadrate der Radiusse, wie die Zirkel; folglich können statt obigen Ausdrücken die Durchschnittslamellen selbst substituiert werden, also

Kugeldurchschnittslamell = Walzendurchschnittslamell — Kegeldurchschnittslamell.

Weil aber diese Durchschnitte überall in der Figur gemacht werden können, und die Gleichung allemal wahr bleibt, so lassen sich endlich alle mögliche Gleichungen addieren, und geben selbst die Summe:

$\frac{\text{Kugl}}{2} = \frac{\text{Walze}}{2} - \text{Kegl}$, oder nach unser angenommenen Benennung

$\frac{S}{2} = c - k$

aber $k = \frac{1}{3} c$

Subst. $\frac{S}{2} = c - \frac{1}{3} c$

abgek. $\frac{S}{2} = \frac{2}{3} c$

Nun ist aber $c = \frac{1}{2} C$ nach der Vorauss.

subst. $\frac{S}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} C$

$\frac{S}{2} = \frac{2}{5} C = \frac{1}{3} C$

X2 $S = \frac{2}{3} C$

§ 239. **Zusatz.** Da der Kegel der dritte Theil einer Walze von gleicher Höhe und Grundfläche ist, und die Kugel zween Drittheile von dieser Walze giebt, so verhalten sich Kegeln, Kugeln und Walzen von gleicher Höhe und Grundfläche, wie 1, 2, 3.

§. 240. **Lehrsatz.** Der körperliche Inhalt einer Kugel ist gleich dem sechsten Theil des Produkts aus dem Kubus des Durchmessers in die Zahl 3, 14.

Satz.

$$S = \frac{d^3 \pi}{6}$$

Beweis.

Man setze einen Zylinder und eine Kugel von gleicher Grundfläche und Höhe, so ist, weil die Grundfläche $\frac{d^2 \pi}{4}$ und die Höhe $= d$ gesetzt wird:

$$C = \frac{d^2 \pi}{4} \times d$$

$$\text{oder} \quad C = \frac{d^3 \pi}{4}$$

$$\times \tfrac{2}{3} \qquad \tfrac{2}{3} C = \frac{2\, d^3 \pi}{12} = \frac{d^3 \pi}{6}$$

$$\text{aber} \quad \tfrac{2}{3} C = S$$

$$\text{Also} \quad S = \frac{d^3 \pi}{6}$$

§. 241. **Zusatz.** Wollte man lieber den Radius als den Diameter in dieser Formel wünschen, so darf nur ein Aequivalent in Radiussen statt d^3 substituiert werden. Es ist aber $d = 2r$

$$d^3 = 8 r^3 \text{ folgl. } S = \frac{8 r^3 \pi}{6}$$

$$S = \frac{4 r^3 \pi}{3}$$

§. 242. Zusatz. Eben so leicht ist es, statt dem Radius, oder dem Diameter, die Peripherie in die Rechnung zu bringen. Wir wissen daß $p = d\pi$, also $\frac{p}{\pi} = d$ und $\frac{p^3}{\pi^3} = d^3$. Dieß nun substituiert giebt

$$S = \frac{p^3 \pi}{6\pi^3} = \frac{p^3}{6\pi^2}$$

§. 243. Zusatz. Diese Formeln dienen nun, aus dem gegebnen Inhalt einer Kugel, den Radius oder den Diameter, oder auch die Peripherie derselben unmittelbar zu finden. Denn weil im ersten Fall

$$S = \frac{4\,r^3\,\pi}{3}$$

$$\text{so ist } 3S = 4\,r^3\,\pi$$

$$\text{dann } \frac{3S}{4\pi} = r^3$$

$$\text{und } \sqrt[3]{\frac{3S}{4\pi}} = r$$

Weil im zweyten Falle diese Gleichung nur doppelt darf genommen werden,

$$\text{so ist } 2\sqrt[3]{\frac{3S}{4\pi}} = 2r = d$$

Und endlich im dritten Falle

$$S = \frac{p^3}{6\pi^2}$$

$$6\pi^2 S = p^3$$

$$\sqrt[3]{6\pi^2}\,S = p$$

§. 244. **Lehrsatz.** Die kubischen Inhalte zwoer Kugeln verhalten sich wie die Kubusse der Radiusse, oder der Diameter oder auch der Peripherien.

Sätze.

1) $f : S = r^3 : R^3$
2) $= d^3 : D^3$
3) $= p^3 : P^3$

Beweis.

Es ist zwar analogisch richtig, daß zween ähnliche Kröper sich verhalten wie die Kubusse ähnlich liegender oder gleichnamiger Linien in selben, welches sich auch leicht erweisen läßt; folglich wäre es von Kugeln ausgemacht, weil sie alle einander ähnlich sind: indeß ist hier im besonderen Falle von Kugeln die Sache bald dargethan.

I $f = \frac{4 r^3 \pi}{3}$

$S = \frac{4 R^3 \pi}{3}$

$f : S = \frac{4 r^3 \pi}{3} : \frac{4 R^3 \pi}{3}$ $\times 3$

$= 4 r^3 \pi : 4 R^3 \pi$ $: 4 \pi$

$f : S = r^3 : R^3$

II $f = \frac{d^3 \pi}{6}$

$S = \frac{D^3 \pi}{6}$

$f : S = \frac{d^3 \pi}{6} : \frac{D^3 \pi}{6}$ $\times 6$

$= d^3 \pi : D^3 \pi$ $: \pi$

$f : S = d^3 : D^3$

III

III $$f = \frac{p^3}{6\pi^2}$$

$$S = \frac{p^3}{6\pi^2}$$

$$f : S = \frac{p^3}{6\pi^2} : \frac{p^3}{6\pi^2}$$

$$\times 6\pi^2$$

$$f : S = p^3 : p^3$$

§. 245. **Anmerk.** Kugelausschnitte lassen sich weit leichter nnd richtiger in der sphärischen Trigonometrie als hier berechnen: wir wollen sie also bis dorthin versparen.

§. 246. **Erkl.** Unter der Oberfläche eines Körpers versteht man die ganze Begränzung desselben von allen Seiten.

§. 247. **Lehrsatz.** Die Oberfläche eines dreyeckichten rechtwinklichten Prisma, dessen Seitenflächen nämlich alle rechtwinklicht auf der Grundfläche stehen, ist, wenn Fig. 119 a, b und c die Seiten der Grundfläche vorstellen, und p die Höhe des Prisma bedeutet $= (a+b+c)\,p$

$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

Beweis.

Die Seitenflächen als Rechtecke geben

$$ap + bp + cp = (a+b+c)\,p$$

Da ferner die Grundflächen zwey gleiche Dreyecke sind von den nämlichen Seiten, so machen sie

$$2 \times \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

Das ist, weil $2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

Folg-

Folglich giebt die Summe der Seiten und Grundflächen

$$S = (a+b+c)\ p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (-a+b+c)}$$

§. 248. Zusatz. Wenn das Prisma schief ist, so geben zwar die Grundflächen ebenfalls das nämliche Resultat; aber die Seitenflächen müssen nach den Gesetzen der schiefen Parallelogramen berechnet, das heißt auf die Seitenlinien, deren eine wir, weil sie gleich sind, p nennen wollen, Perpendikel gefällt werden, wenn nun Fig. 20 diese α, β, γ heißen, so ist wiederum

$$\text{Superf.} = (+\alpha+\beta+\gamma)\ p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)\ (a+b-c)\ (a-b+c)\ (-a+b+c)}$$

§. 249. Zusatz. Steht das Prisma auf einem gleichseitigen Dreyecke, so erhält man zur Oberfläche

$$S = 3\,l\,p + 2 \times \tfrac{1}{4} l^2 \sqrt{3}$$

abgek. $$S = 3\,l\,p + \tfrac{1}{2} l^2 \sqrt{3}$$

§. 250. Zusatz. Ist das Prisma ein Kubus, und nennt man eine Seitenlinie a, so erhält man für Sup. $= 6\,a^2$.

§. 251. Zusatz. Ist es ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, und heißen die zwo verschiedenen Seiten der Grundfläche a und b, so wird die Sup. $= 2(a+b)\,p + 2\,ab$ seyn. Schiefe Parallelepiden können mehrmal nicht anders, als durch Perpendikel bestimmt werden.

§. 252. Zusatz. Für Prismen, deren Grundfläche reguläre Polygone sind, verwandeln sich deren Ausdruck in diesen

$$nlp + nl\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$$ wie Jedermann aus §. 193 leicht begreift. Für irreguläre hingegen, wenn P den Ummesser (Perimeter) und B die Grundfläche selbst bedeutet

$$\text{Sup.} = Pp + 2B$$

§. 253. **Zusatz.** Weil Zylinder Unendlichecke, nämlich Zirkel zur Grundfläche haben, deren Perimeter die Peripherie $d\pi$ ist, so gilt hier die Formel

$$\text{Sup.} = d\pi p + \frac{2d^2\pi}{4}$$

$$\text{abgek.} \quad = d\pi p + \frac{d^2\pi}{2}$$

$$\text{anders ges.} \quad = (p + \tfrac{d}{2})\, d\pi$$

§. 254. **Anmerk.** Um sich sinnlich davon zu überzeugen, darf man nur einen kleinen hölzernen Zylinder mit Papier umwickeln, und es so zu rechte schneiden, daß es ihn ausser den beyden Grundflächen ganz bedeckt, so wird, wenn man das Papier wieder davon los macht, und gehörig ausbreitet, dasselbe ein Rechteck vorstellen, dessen Höhe, die Höhe des Zylinders, und die Grundlinie, die Peripherie vorstellt; folglich ist der erste Ausdruck der Formel $d\pi \times p$ richtig, das übrige erhellet von sich selbst.

§. 255. **Zusatz.** Schiefstehende Zylinder gehören nicht hieher, sondern in die höhere Geometrie; weil ihre Grundflächen keine Zirkel mehr, sondern Ellipsen sind.

§. 156. **Lehrsatz.** Die Oberfläche einer dreyeckichten geradestehenden Pyramide ist, wenn Fig. 121 alles wie vorher, $= \frac{1}{2}p\,(a+b+c) + \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c)}$

Beweis.

Die Seitendreyecke lassen sich alle in eines verzeichnen, wo der Perpendikel an einer der Seiten herun-

herunter, die Höhe, und der Ummeßer die Basis giebt; also sind diese $= \frac{p}{2}\sqrt{(a+b+c)}$. Die Grundfläche ist ohnehin $= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)}\ (a+$ u. s. f.

also Sup. $= \frac{1}{2}p\ (a+b+c) + \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)}$
$(a-b+c)\ (-a+b+c)$

§. 257. Zusatz. Schiefstehende Pyramiden haben drey verschiedene Perpendikel, das übrige ist das nämliche.

§. 258. Zusatz. Ist die Grundfläche bey geradstehenden Pyramiden ein gleichseitiges Dreyeck, so bekömmt man mehrmal, wenn die Seite l heißt $\frac{3lp}{2} + \frac{1}{4}l^2\sqrt{3}$

§. 259. Zusatz. Steht die Pyramide auf einem regulären Polygone, so ergiebt sich die Gleichung

$$S = \frac{nlp}{2} + \frac{nl}{2}\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$$

§. 260. Zusatz. Steht sie aber auf einem irregulären Polygon, und heißt die Grundfläche wieder B, so wie der Ummesser P, so ist

$$\text{Sup.} = \frac{Pp}{2} + B$$

§. 261. Zusatz. Die Oberfläche des Kegels, wo der Ummesser $= d\pi$ und die Grundfläche $d^2\pi$, ist demnach $= \frac{d\pi p}{2} + \frac{d^2\pi}{4} = (2p+d)\frac{d\pi}{4}$

§. 262. Zusatz. Man kann bey Kegeln auch sehr bequem aus ihrer wahren Höhe die schiefe Höhe finden; denn es ist Fig. 122

$$ad^2 = ac^2 + dc^2$$

subst. $p^2 = a^2 + \frac{d^2}{4}$

$$p = \sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}}$$

Wenn nun in der obigen Formel statt p substituiert wird, so giebt dieß

$$\text{Sup.} = (2\sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}} + d)\ \frac{d\pi}{4}$$

§. 263. Zusatz. Aus den Begriffen von Polyäedern kann es auch gar nicht schwer seyn, ihre Oberflächen zu bestimmen; weil sie von lauter regulären Figuren eingeschlossen sind. Wer sieht z. B. nicht, daß beym Tetraedrum, wenn die Seite eines Dreyecks $= 1$, folglich der Inhalt jedes solchen Dreyecks $\frac{1}{4} 1^2 \sqrt{3}$ ist, die Oberfläche $= 4 \times \frac{1}{4} 1^2 \sqrt{3} = 1^2 \sqrt{3}$ seyn müsse, und so von andern zu reden.

§. 264. Lehrsatz. Die Oberfläche jeder Kugel ist gleich vier grösten Zirkelflächen, das ist solcher, die durch den Mittelpunkt der Kugel gehen; oder was eins ist, dem Produkt aus dem Quadrat des Diameters in die Zahl 3,14.

Satz.

$$4C = \text{Sup.} = D^2 \pi$$

Beweis.

Man bilde sich neben der Kugel einen Zylinder ein, der zur Grundfläche einen grösten Zirkel der Kugel, und zur Höhe den Diameter davon hat, so ist, wenn Z den Zylinder und K die Kugel vorstellt,

$$CD = Z$$

$$\times \tfrac{2}{3} \qquad \tfrac{2}{3} CD = \tfrac{2}{3} Z$$

aber $\qquad K = \tfrac{2}{3} Z$

$$\tfrac{2}{3} CD = K$$

Weil

Weil sich ferner die Kugel als ein Aggregat von unendlich vielen und dünnen Pyramiden, die zur Höhe den halben Diameter haben, betrachten läßt, so können diese alle in eine einzige Pyramide verwandelt werden, deren Grundfläche die Oberfläche der Kugel seyn wird. Folglich ist ihr Inhalt

$$\frac{\text{Sup.} \times \frac{1}{2} D}{3} = \frac{1}{6} \text{Sup.} \times D$$

Also $\frac{1}{6}$ Sup. $\times$ D = K; und oben hieß es

$\frac{2}{3}$ C $\times$ D = K

$\frac{2}{3}$ C D	$= \frac{1}{6}$ Sup. D	D:
$\frac{2}{3}$ C	$= \frac{1}{6}$ Sup.	6 $\times$
$\frac{1}{3}^2$ C $= 4$ C	= Sup.	

Das erste, was zu erweisen war. Weil endlich

$$C = \frac{D^2 \pi}{4}$$

und $4C = D^2 \pi$ ist, so kann mehrmal substituiert werden, und dann ist auch

$$\text{Sup.} = D^2 \pi$$

§. 265. Zusatz. Man erhält demnach den Inhalt der Kugel auch durch Berechnung, wenn man sie pyramidenartig betrachtet. Die Grundfläche dieser Pyramide wäre also $d^2 \pi$ oder vier größte Zirkel, diese nun durch den dritten Theil der Höhe multipliciert, das ist durch $\frac{d}{6}$, giebt $\frac{d^3 \pi}{6}$ die obige Formel für Kugeln.

§. 266. Anmerk. Zum Beschluß noch eine Aufgabe von solchen Kugelberechnungen. Wenn des Mondes Durchmesser nach de la Landes 1785306 Toisen (Französische Klafter zu 6 Schuhe) hält; wie viel beträgt sein körperlicher Inhalt in Kubiktoisen; vorausgesetzt, daß er eine wahre Kugel sey?

Auf-

Auflösung. Man setze in der Formel $\frac{d^3 \pi}{6}$ statt den Buchstaben die gehörigen Zahlen, und nehme π in etwas mehr Decimalen, so giebt dieß $\frac{(1785306)^3 \times 3{,}1415}{6}$

$= \frac{5690337090099933^{26}6 \times 3{,}1415}{6}$

$= \frac{17876193971364403413{,}164}{6} = 2979365661895733902{,}194.$

Kubiktoisen.

Körperwandlung.

§. 267. **Erkl.** Körper verwandeln, heißt ihre Oberfläche, des kubischen Inhalts unbeschadet, in eine andere reguläre Figur umändern.

§. 268. **Anmerk.** Diese Arbeit zu erleichtern, dörfen nur die Ausdrücke für die Kubaturen der Körper in Bereitschaft gehalten werden. Die vornehmsten sind, wie oben gezeigt worden 1) für Prismen aB, wo B die Grundfläche bedeutet, 2) für Zylinder $\frac{a d^2 \pi}{4}$, 3) für Pyramiden $\frac{aB}{3}$ 4) für Kegel $\frac{a d^2 \pi}{12}$ und 5) für Kugeln $\frac{d^3 \pi}{6}$

§. 269. **Aufgabe.** Ein Parallelepipedum, das zur Grundfläche ein Quadrat hat, wovon die Seite a heißt, und dessen Höhe noch so groß als diese Seite ist, in einen Kubus zu verwandeln, oder was eins ist, einen Kubus zu verdoppeln.

Anflösung. Die Seite des Kubus, ist x, folglich sein Inhalt $= x^3$. Weil nun der Inhalt eines Parallelepipedums durch das Produkt aus der Grundfläche in die Höhe bestimmt wird, so giebt dieß hier $a^2 \times 2a = 2a^3$; also die Gleichung

$$x^3 = 2a^3$$

$$x = \sqrt[3]{2a^3}$$

oder $x = a\sqrt[3]{2}$

§. 270. **Anmerk.** Dieß war eigentlich jenes berüchtigte Problem von Verdopplung des Kubusses, welches die Alten so lange nicht aufzulösen wußten, ungeachtet ihnen viel daran lag, und dessen Aufschluß sie endlich auf einem mühsamen Umweg fanden. Hyppokrates und Eratostenes kamen nämlich auf den Gedanken, die Seite eines noch so großen Kubusses müsse die erste von zwo mittleren geometrischen Proportionalgrößen seyn, die zwischen eine und zwo Seiten des einfachen Kubusses hineinfallen, und fanden diesen Gedanken auch wirklich gegründet. Es läßt sich dieß auch algebraisch zeigen. Die Progreßion, welche ohnehin nichts anders ist, als eine fortgesetzte stättige Proportion, wird demnach so aussehen: a, x, y, 2 a Folglich ist nach der Progreßionslehre

$$\text{I}\quad ay = x^2 \qquad \text{II}\quad 2ax = y^2$$

$$y = \frac{x^2}{a}$$

$$\text{und}\quad y^2 = \frac{x^4}{a^2}$$

III

$$\frac{x^4}{a^2} = 2ax$$

$$\frac{x^3}{a^2} = 2a$$

$$x^3 = 2a^3$$

$$x = \sqrt[3]{2a^3}$$

$$\text{oder}\quad x = a\sqrt[3]{2}$$

Aber wer sieht nicht, daß die obige arithmetische Art ungleich simpler und kürzer gewesen wäre, dieses Problem aufzulösen, als diese letztere, die gewiß für die Alten sehr schwierig seyn mußte, weil sie die Algebra nicht zu Hilfe rufen konnten.

§. 271. **Aufgabe.** Einen Zylinder von gegebnem Durchmesser d, und die Höhe a in eine Kugel zu verwandeln: wie groß wird der Radius oder der Diameter derselben werden.

Auf-

Auflösung. Es ist demnach in der Formel $\frac{d^3 \pi}{6}$ das $d = x$ folglich

$$\frac{a\,d^2\,\pi}{4} = \frac{x^3\,\pi}{6}$$

$$a\,d^2 = x^3$$

$$\frac{6\,a\,d^2}{4} = x^3$$

oder $$\frac{3\,a\,d^2}{2} = x^3$$

also $$\sqrt[3]{\frac{3\,a\,d^2}{2}} = x$$

§. 272. Aufgabe. Einen abgestutzten Kegel, dessen Höhe $= a$, und die Radiusse R und r sind, soll in einen Zylinder verwandelt werden, der nur p hoch seyn darf, wie groß wird dessen Durchmesser seyn?

Auflösung. Antwort $d = x$. Mithin wird der Ausdruck des Zylinders $\frac{a\,d^2\,\pi}{4}$ in diesen umgeändert $\frac{p\,x^2\,\pi}{4}$

Also die Gleichung

$$\frac{\frac{(R^3 - r^3)\,a\,\pi}{3\,(R - r}}{} = \frac{p\,x^2\,\pi}{4} \quad \text{§. 236.}$$

$$\frac{\frac{(R^3 - r^3)\,a}{3\,(R - r)}}{} = \frac{p\,x^2}{4}$$

$$\frac{\frac{4\,(R^3 - r^3)\,a}{3\,(R - r)}}{} = p\,x^2$$

$$\frac{4\,a\,(R^3 - r^3)}{3\,p\,(R - r)} = x^2$$

$$\sqrt{\frac{4\,a\,(R^3 - r^3)}{3\,p\,(R - r)}} = x$$

$$2\sqrt{\frac{a\,(R^3 - r^3)}{3\,p\,(R - r)}} = x$$

§. 273.

§. 273. **Aufgabe.** Eine Kugel, deren Diameter δ ist, in ein Prisma zu verwandeln, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreyeck, und die Höhe gleich m werden soll, wie groß wird eine Seite der Grundfläche ausfallen?

Auflösung. Da der Ausdruck für ein Prisma $= aB$ ist, und B in unserm Fall ein gleichseitiges Dreyeck bezeichnet, so muß $\frac{l^2}{4}\sqrt{3}$ dafür substituiert werden. Endlich weil eben l als unbekannt gesucht wird, so setze man an dessen statt x, und man erhält $\frac{x^2}{4}\sqrt{3}$ folglich

$$\frac{\delta^3 \pi}{6} = \frac{x^2}{4}\sqrt{3} \times m$$

oder

$$\frac{\delta^3 \pi}{6} = \frac{m x^2}{4}\sqrt{3}$$

$$\frac{4\,\delta^3 \pi}{6} = m x^2 \sqrt{3}$$

$$\frac{2\,\delta^3 \pi}{3} = m x^2 \sqrt{3}$$

$$\frac{2\,\delta^3 \pi}{3\,m\sqrt{3}} = x^2$$

$$\sqrt{\frac{2\,\delta^3 \pi}{3\,m\sqrt{3}}} = x$$

§. 274. **Anmerk.** Um die Sache begreiflicher zu machen, wollen wir ein Paar praktische Beyspiele der Verwandlung anführen.

I **Aufgabe.** Wie lange müßte ein Haarröhrchen, d. i. ein gläserner Zylinder seyn, dessen Durchmesser eine Linie beträgt, um einen Kubikzoll Wassers zu fassen?

Auflösung. Die Basis eines solchen Haarröhrchens ist nach dem Ausdrucke $\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{1 \times 3{,}14}{4} = \frac{3{,}14}{4}$.

Weil nun die Höhe unbekannt ist, so heiße sie x, und weil ein Kubikzoll 1728 Kubiklinien hält, so ist

$$\frac{3{,}14\ x}{4} = 1728$$

$$3{,}14\ x = 6912$$

$$x = \frac{6912}{3{,}14} = 2201 \text{ Linien} = 183 \text{ Zolle } 5 \text{ Linien} = 15 \text{ Schuh } 3 \text{ Zoll } 5 \text{ Linien}$$

, die Höhe des Harröhrchens.

II Aufgabe. Ein Böttcher soll ein Faß von 24 Eimer verfertigen, welches nicht länger als 12 Schuhe werden darf, und dessen Bodenhöhe sich zur Spundhöhe wie 4 : 5 verhalten soll; welche Gestalt wird es bekommen?

Auflösung. Wenn man Crusens Kontoristen mit H. Prof. Westenrieder (Beschreibung der Stadt München) vergleicht, so hält der baierische Eimer genau 2 Pariserkubikfüsse, folglich 24 Eimer 48 Kubikschuhe. Setze man unn die Bodenhöhe $= x$, so wird nach der Proportion $4 : 5 = x : \frac{5x}{4}$ die Spundhöhe $\frac{5x}{4}$ seyn. Weil sich nun jedes Faß als ein doppelter abgestutzter Kegel betrachten läßt, so kann hier die allgemeine Gleichung $S = \frac{(R^3 - r^3)\ a\pi}{3\ (R - r)}$ für den besondern Fall angewendet werden.

Es ist demnach für den doppelten Kegel wo $\frac{5x}{2 \times 4} = R$ und $\frac{x}{2} = r$, und a endlich $= 12$ gilt.

$$48 = \frac{\left(\left(\frac{5x}{8}\right)^3 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 \times 12 \times 3{,}14\right)}{3\ \left(\frac{5x}{8} - \frac{x}{2}\right)}$$

$$48 = \frac{\left(\frac{125\ x^3}{512} - \frac{x^3}{8}\right) \times 12 \times 3{,}14}{3\ \left(\frac{5x}{8} - \frac{x}{2}\right)}$$

$$48 = \frac{\left(\frac{125\ x^3 - 64\ x^3}{512}\right) \times 12 \times 3{,}14}{3\ \left(\frac{5x - 4x}{8}\right)}$$

48

$$48 = \frac{61\,x^3 \times 12 \times 3{,}14}{3 \times 512} : \frac{x}{8}$$

$$= \frac{61\,x^3 \times 12 \times 3{,}14}{3 \times 512} \times \frac{8}{x}$$

$$= \frac{61\,x^3 \times 12 \times 3{,}14 \times 8}{3\,x \times 512}$$

$$48 = \frac{61\,x^2 \times 4 \times 3{,}14 \times 8}{512} = \frac{6129{,}28\,x^2}{512}$$

$$24576 = 6129{,}28\,x^2$$

$$x^2 = \frac{24576}{6129/28} = 4$$

$x = 2$ Schuh beynahe Bodenhöhe. Dieß in $\frac{5x}{4}$ für x substituiert giebt $\frac{5 \times 2}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$ Schuh Spundhöhe im Parisermaase.

§. 275. **Anmerk.** Aus diesen wenigen Aufgaben läßt sich leicht auf die Verfahrungsart verschiedner anderer Probleme dieses Faches schließen.

Ebene Trigonometrie.

§. 1. Erklärung.

Sie ist die Wissenschaft aus drey gegebenen Stücken eines Dreyeckes, worunter doch wenigst eine Seite seyn muß; die übrigen drey Stücke durch Rechnung zu finden.

§. 2. Zusatz. Warum aus drey gegebnen Winkeln eines Dreyeckes nichts bestimmt werden könne, erhellet daraus, weil es unendlich viele ähnliche Dreyecke geben kann, die die nämlichen Winkel haben.

§. 3. Zusatz. Neben den geometrischen Linien hat man in der Trigonometrie noch andere nöthig, mit welchen man sich also bekannt machen muß. Die nöthigsten sind: Sinus, Kosinus, Tangente; und wenn man noch will: Kotangente, Sekante, Kosekante, Quersinus, und Koquersinus.

§. 4. Erkl. Wenn zu einem Winkel sein Bogen, den er zum Maase hat, aus dem Scheitel beschrieben wird, oder zu einen Bogen die Radiusse gezogen werden, die ihn begränzen, so ist der Sinus dieses Bogens oder Winkels der Perpendikel, welcher von dem Ende des einen Radius auf den

andern

andern herabgefällt wird. Es versteht sich von selbst, daß in manchen Fällen ein Radius rückwärts verlängert werden muß; um diesen Perpendikel, wie bey überhängenden Dreyecken, fällen zu können. Die Tangente ist zwar aus der Geometrie bekannt, sie muß aber hier für jeden Bogen eine bestimmte Länge haben, und sich von dem Endpunkte des einen Radius bis zu dem verlängerten Radius erstrecken. Dieser verlängerte Radius nun wird die Sekante (von secare) genennt, weil diese Linie so lang außer der Peripherie fortgezogen werden muß, bis sie die Tangente schneidet.

Wenn man diese Linien bey einem Winkel oder Bogen wirklich zieht, und dann zu selbem die Ergänzung zu einem rechten Winkel sucht, so werden der Sinus, Tangente, Sekante dieses Ergänzungswinkels, der Kosinus, Kotangente, Kosekante des ersten Winkels genennt, und so auch wechselweise. So ist in Fig. 123 f d der Sinus des Winkels m, und f k sein Kosinus, a b die Tangente, g h die Kotangente; a c die Sekante, und g c die Kosekante. Umgekehrt kann man eben sowohl sagen, daß f k der Sinus von n und f d sein Kosinus sey u. s. f.

§. 5. **Anmerk.** Von besonderer Brauchbarkeit sind aber nur unter diesen Linien der Sinus, Kosinus, und höchstens noch die Tangente. Die übrigen Linien dienen mehr zur spekulativen, als zur ausübenden Trigonometrie. Zum Ueberflusse wollen wir noch den Quersinus (Sinus versus) das Segment des Radius welches zwischen dem Bogen und dem Sinus liegt, als ein solches Geschöpf anführen, um doch seine Bedeutung zu wissen. Es ist Fig. 124 die Linie f d.

§. 6. **Zusatz.** Weil Paralleln zwischen Parallelen gleich sind, so ist der Kosinus a b allemal gleich dem Radius f c weniger dem Quersinus f d; denn es sind Fig. 124 bey b, c und d rechte Winkel, also

ma-

machen allemal zween innere Winkel 180° aus, und die Linien sind demnach parallel. In Zukunft wird daher allemal der Radius, weniger dem Uersinus, den Kosinus bedeuten müssen.

§. 7. **Zusatz.** Zween Nebenwinkel haben einerley Sinus; denn nehme man Fig. 125 einen stumpfen Winkel an, ziehe den Sinus, so wird nach der Definition für den spitzigen Nebenwinkel kein anderer Sinus mehr möglich seyn, als der, den man eben gezogen hat.

§. 8. **Erkl.** Linien sind negativ, wenn sie zu andern, die man positiv heißt, eine Gegenrichtung nehmen, oder in entgegengesetzte Lagen der Figur begriffen sind. Z. B. wenn jene Linie die ich von oben herab, oder von der Rechten zur Linken, ziehen muß, positiv sind, so werden die anderen negativ genennt, die ich von unten herauf, oder von der Linken zur Rechten ziehen soll.

§. 9. **Zusatz.** Man sieht bey näherer Untersuchung ferner, daß Fig. 126 die Sinusse von Anfang bis 90° wachseu, daß der Sinus von 90° selbst dem Radius gleich ist, daß sie von da bis 180° abnehmen, und hier = o sind, daß sie ferner in der untern Hälfte des Zirkels wieder wachsen, aber im negativem Werthe, daß endlich bey 270° der Sinus dem negativen Radius gleich wird, und daß sie dann wieder bis 360 Grad abnehmen, und zum zweytenmal o werden.

§. 10. **Zusatz.** Bey einer gleichen Betrachtung des Kosinus wird man ebenfalls gewahr, wie er im ersten Quadranten mit positiven Werthe abnimmt, im zweyten mit negativen Werthe wächst,

im

im dritten eben so abnimmt, und im vierten wieder positiv wachsend wird. Es erhellet ferners, daß allemal der Kosinus wachse, wenn der Sinus abnimmt, und wechselseitig.

§. 11. **Zusatz.** Eben so einleuchtend ist es Fig. 127, wie die Tangente von 90° unendlich groß werden kann, weil da der Radius, oder vielmehr die werdensollende Sekante, mit der Tangente parallel läuft; und wie ferner auch die Tangente nach dem Beyspiele des Sinus in gewissen Lagen sich positiv, in andern wieder negativ denken läßt, und ebenfalls mit dem Sinus zunimmt.

§. 12. **Lehrsatz.** Wenn man den Sinus eines Bogens so lange verlängert, bis er eine Sehne wird, so ist dieser Sinus die Hälfte davon. Die Richtigkeit dieses Satzes fließt zwar schon aus der Zirkellehre, wo dargethan worden, daß jeder Radius, der eine Sehne perpendikulär schneidet, dieselbe auch halbieret; doch läßt sich die Sache sehr kurz auch auf einem andern Weg erweisen.

Satz. Fig. 128

$$ad = \tfrac{1}{2} af$$

Beweis.

Man verlängere den Radius, worauf der Sinus gefällt ist, zum Diameter, so ist

$$ad^2 = bd \times dg$$

Aber auch $df^2 = bd \times dg$

$$ad^2 = df^2$$

und $$ad = df$$

Allein

Allein $ad + df = af$
subſtit. $ad + ad = af$
abgek. $2\,ad = af$
$ad = \frac{af}{2}$ oder $\frac{1}{2}\,af$

§. 13. Zuſatz. Die Sinuſſe ſind alſo nichts anders, als halbe Sehnen, und weil keine halbe Sehne größer werden kann, als der Radius, ſo ſind ſie alle eigentliche Brüche von ſelbem. Man ſezt daher wirklich in der Trigonometrie durchaus den Radius $= 1$ und ſucht daraus die Werthe der Sinuſſe in Decimalen.

§. 14. Lehrſatz. Der Sinus eines Bogens oder Winkels von 30° iſt dem halben Radius gleich.

Satz. Fig. 129

$$\sin 30° = \tfrac{1}{2}\,r$$

Beweis.

Man ziehe in einem Zirkel den Radius, verbinde eine Sehne damit, die eben ſo groß als er ſelbſt iſt, und ſchließe das Dreyeck, ſo wird es aus dreyen Radiuſſen beſtehen, folglich gleichſeitig ſeyn, und ein Winkel 60° halten. Man theile nun ferner Bogen und Sehne durch einen andern Radius in zween gleiche Theile, ſo wird nach der Definition

$fb = \sin x$ ſeyn
allein $x = df = \frac{60°}{2} = 30°$
und $fb = ab = \frac{af}{2} = \frac{r}{2}$
ſubſtit. $\frac{r}{2} = \sin 30$ oder
$\sin 30 = \frac{1}{2}\,r$

§. 15.

§. 15. **Zusatz.** Wenn nun r = 1, so ist sin 30° = $\frac{1}{2}$ = 0,5. Der einzige Sinus unter allen, der sich rational finden läßt; weil nur von der Sehne, die dem Radius gleicht, bekannt ist, daß man sie genau einigemal, nämlich 6mal, an der Peripherie herumtragen kann; folglich ihr der sechste Theil der Peripherie, das ist 60°, und ihrer Hälfte der Sinus von 30° als Bogen entsprechen.

§. 16. **Anmerk.** Wie aber aus diesem einzigen rationalen Sinus alle übrige gefunden worden, wollen wir am Ende der Trigonometrie etwas ausführlicher zeigen. Genug, daß wir einsweilen wissen, daß sie zu unserm Gebrauche bereits alle, so genau als möglich, berechnet sind, und nur in den sogenannten Sinustafeln nachgeschlagen werden dörfen.

§. 17. **Anmerk.** Wolf in seinen Elementen zeigt zwar auch, wie man aus einem gegebnen Radius ein reguläres Fünfeck, Achteck, Zehneck u. s. f. beschreiben könne; aber es sind schon lauter Irrationalgrößen zum Grunde gelegt, folglich erhält man wieder für solche Sehnen Irrationalzahlen, die wir für Sinusse leichter auf andern Wegen erhalten. Wir werden vielleicht am Ende ein solches Beyspiel theils zur Probe unsers Verfahrens, theils zur Vergleichung anführen.

§. 18. **Lehrsatz. Aus dem Sinus kann auch sein Kosinus berechnet werden. Es ist nach trigonometrischen Sinne der**

Satz. Fig. 130

$$\text{cos.} = \sqrt{1 - \text{sin}^2}$$

Beweis.

Weil, wie wir oben sagten, der Kosinus a d immer = c b ist, und

$$cb^2 = ab^2 - ac^2$$

$$cb = \sqrt{ab^2 - ac^2}$$

so kann subst. werden $\text{cos.} = \sqrt{1 - \text{sin}^2}$

§. 19. Zusatz. Es ist also $\cos 30° = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

§. 20. Zusatz. Weil nun der Sinus von 60° gleich ist dem Kosinus von 30°, so ist eben darum $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

§. 21. Lehrsatz. Die Tangente von 45° ist so groß als der Radius selbst.

Satz. Fig. 131

$\tan 45° = r$

Beweis.

Man ziehe einen Radius, errichte auf denselben eine Tangente, die ebenfalls so groß ist, und schließe den rechten Winkel durch die Sekante, so hat man ein rechtwinklichtes gleichschenklichtes Dreyeck, wo jeder Winkel an der Hypothenuse 45° hält; also

$db = \tan c$

aber $db = r$

---

also $\tan c = r$

aber $c = 45°$

subst. $\tan 45° = r$

§. 22. Zusatz. Alle Tangenten also, welche größern Bögen als 45° zukommen, sind größer, als der Radius, und wachsen bis 90° ins Unendliche fort.

---

§. 23. Zusatz. Weil $dc = \sqrt{db^2 + bc^2}$ so wird in diesen Fall nach der Substitution $\sec 45° = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ seyn.

§. 24.

§. 24. Lehrsatz. Wird die Tangente und Sekante allgemein mit Zuziehung des Sinus und Kosinus bestimmt, so ist die erste $= \frac{\text{sin}}{\text{cos}}$; die zweyte $= \frac{1}{\text{cos}}$

Beweis. Fig. 132

I Wegen ähnlichen △ △ II

ad : dc = bf : fc
tang : 1 = sin : cos
tang × cos = sin
$\text{tang} = \frac{\text{sin}}{\text{cos}}$

ac : bc = dc : fc
sec : 1 = 1 : cos
sec × cos = 1
$\text{sec} = \frac{1}{\text{cos}}$

§. 25. Zusatz. Es ist richtig, daß der Kosinus von $90° = 0$, der Sinus $= 1$ die Tangente unendlich werde. Folglich ist hier nach aller Strenge erwiesen, daß, wenn dieß alles in dem Ausdruck $\text{tang} = \frac{\text{sin}}{\text{cos}}$ substituiert wird, $\frac{1}{0} = \infty$ sey.

§. 26. Zusatz. Wenn in beyden Ausdrücken statt cos sein Aequivalent $\sqrt{1 - \text{sin}^2}$ substituiert wird, so bekömmt man folgende Formeln:

$$\text{tang} = \frac{\text{sin}}{\sqrt{1 - \text{sin}^2}}; \quad \text{sec} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sin}^2}}$$

§. 27. Zusatz. Es lassen sich auch in der Formel $\text{tang} = \frac{\text{sin}}{\text{cos}}$ der Sinus und Kosinus, wie jeder sieht, sogleich allein finden; Es ist nämlich

$$\text{sin} = \text{tang} \times \text{cos} \text{ und } \text{cos} = \frac{\text{sin}}{\text{tang}}$$

§. 28. Zusatz. Weil der Komplementswinkel oder Bogen von $45°$ ebenfalls $45°$ beträgt, so

folgt daraus, daß in diesem Falle Sinus und Kosinus, Tangente und Sekante u. s. f. einander gleich sind. Folglich ist gemäß dem Ausdrucke $\text{sec} = \frac{1}{\text{cos}}$

auch $\text{sec } 45° = \frac{1}{\text{sin } 45}$ aber es ist

$$\frac{\text{sec } 45 = \sqrt{2}}{\text{also } \sqrt{2} = \frac{1}{\text{sin } 45°}}$$

$$\text{sin } 45° \times \sqrt{2} = 1$$
$$\text{sin } 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

§. 29. **Lehrsatz.** Die Kotangente wird aus dem Sinus und Kosinus, und die Kosekante aus dem Sinus allein bestimmt.

Sätze. Fig. 133

$$\text{cot} = \frac{\text{cos}}{\text{sin}}. \quad \text{cosec} = \frac{1}{\text{sin}}$$

Beweis.

I $\triangle$ abc $\sim$ fgc wegen rechten und Wechselw. m und n

$$\text{ab} : \text{bc} = \text{gc} : \text{fg}$$
$$\text{cot} : 1 = \text{cos} : \text{sin}$$
$$\text{cot} \times \text{sin} = \text{cos}$$
$$\text{cot} = \frac{\text{cos}}{\text{sin}}$$

II In eben diesen Dreyecken

$$\text{ac} : \text{bc} = \text{fc} : \text{fg}$$
$$\text{cosec} : 1 = 1 : \text{sin}$$
$$\text{cosec} \times \text{sin} = 1$$
$$\text{cosec} = \frac{1}{\text{sin}}$$

§. 30.

§. 30. **Zusatz.** Weil der Ausdruck der Kotangente gerade der umgekehrte von der Tangente ist, so erhellet, daß sich auch die Tangenten zweyer Bögen umgekehrt verhalten, wie ihre Kotangenten.

§. 31. **Zusatz.** Da es richtig ist, daß in ähnlichen Figuren gleichnamige Linien in Verhältniß stehen, so ist dieß auch von allen trigonometrischen Linien untereinander wahr, wenn sie ähnlichen Bögen zugehören. Es sind aber die Bögen dann ähnlich, wenn die Anzahl ihrer Grade gleich groß ist, oder was auf eines hinausläuft, wenn sie konzentrisch sind, und zwischen zwo Radiusrichtungen liegen. Die Wahrheit dieses Satzes fällt auch gleich beym Anblick der Figur in die Augen, wo nichts als ähnliche Dreyecke von trigonometrischen Linien angetroffen werden. So z. B. ist Fig. 134

$$ab : bc = fd : dc \text{ u. s. f.}$$

subst. $tang : R = tang : r$

§. 32. **Erkl.** Der Sinus von 90°, welcher dem Radius gleich ist, und daher ein ganzes gilt, da alle übrige nur Brüche davon sind, heißt der Sinus totus.

§. 33. **Anmerk.** Man sieht aus allen diesem, wie viele Formeln durch Zuziehung anderer Linien; dann auch durch die Vergleichung der Ausdrücke selbst, die spekulative Trigonometrie zu fernern Schlüßen erobern könnte: uns dünkt genug zu seyn, nur die Bahn dazu eröffnet zu haben.

§. 34. **Lehrsatz.** **In jedem Dreyecke verhalten sich die Seiten, wie die Sinusse ihrer Gegenwinkel; oder auch umgekehrt: Es verhalten sich die Sinusse der Winkel, wie ihre Gegenseiten.**

Satz. Fig. 135

ag : ad = sin d : sin i.

Beweis.

Man beschreibe um das Dreyeck einen Zirkel, theile die gegebnen Seiten, und ihre entsprechenden Bögen in zween gleiche Theile durch Perpendikularradiusse; so werden die halben Seiten zu Sinussen von Bögen, die das Maas der entgegengesetzten Peripherialwinkel sind. Es ist nun, wenn auch zuvor vom dritten Winkel ein Radius hereingezogen wird.

ag = ½ ai
und af = ½ ad Ferner

o = ah
und d = ah nach §. 83. Geom. daher

o = d Eben so
m = i
Endlich ag = sin o
af = sin m In Proportion gesetzt.

ag : af = sin o : sin m
subst. ½ ai : ½ ad = sin d : sin i
X2 ai : ad = sin d : sin i

§. 35. **Zusatz.** Kommen zwo andere Seiten in den Satz, so müssen diese statt jenen getheilt werden, und der Beweis ist der nämliche.

§. 36. **Anmerk.** Dieser Lehrsatz muß wohl gemerkt werden, denn er ist die Grundlage der ganzen praktischen Trigonometrie. Wir werden bemüht sern, alle Fälle auf diesen Satz zu gründen, und uns anderer Linien z. B. der Tangenten so wenig als möglich bedienen.

§. 37. **Lehrsatz.** Wenn in einem Dreyecke, wo man will ein Winkel in zween beliebige Theile getheilt,

getheilt, und die Theilungslinie bis zur Gegenseite verlängert wird, so verhalten sich die Sinusse der Winkeltheile, ordentlich wie die Abschnitte dieser Gegenseite, und umgekehrt, wie die angränzenden Seiten.

Satz. Fig. 136

$$\sin y : \sin x = \frac{cb}{ab} : \frac{cd}{ad}$$

Beweis.

$\sin y : \sin m = bc : ab$
$\sin \delta : \sin x = ad : cd$

$\sin \gamma \times \sin \delta : \sin m \times \sin \varkappa = bc \times ad : ab \times cd$

Aber $\sin m = \sin \delta$ Als Sinus von Nebenw. daher subst.

$\sin y \times \sin m : \sin m \times \sin x = bc \times ad : ab \times cd$

(:*sin m*) $\sin y : \sin x = bc \times ad : ab \times cd$

$(ab \times ad)$:

$$\sin y : \sin x = \frac{bc \times ad}{ab \times ad} : \frac{ab \times cd}{ab \times ad}$$

$$\text{oder } \sin y : \sin x = \frac{bc}{ab} : \frac{cd}{ad}$$

§. 38. **Lehrsatz.** Wenn in einem gleichschenklichten Dreyecke der Winkel am Scheitel in zween gleiche Theile getheilt, und vom Theilungspunkt eine gerade Linie an die Grundlinie hin gezogen wird, so ist die halbe Grundlinie nach trigonometrischen Ausdrücken gleich dem Produkte aus einem Schenkel in den Sinus des halben Scheitelwinkels, und folglich die ganze Grundlinie einem doppelten solchen Produkte.

Satz. Fig. 137

$\frac{1}{2}b = c \times \sin \frac{1}{2}v$, wo c einen Schenkel (crus), und v den Scheitelwinkel (vertex) bezeichnet.

Beweis.

$$df = \sin o$$
$$vd = r$$

$$df : vd = \sin o : r$$

subst. $\frac{1}{2}b : c = \sin \frac{1}{2}v : 1$

$$\frac{1}{2}b = c \times \sin \frac{1}{2}v$$

oder $$b = 2c \times \sin \frac{1}{2}v$$

§. 39. **Zusatz.** Wird nun c oder $\sin \frac{1}{2}v$ nach der Transpositionslehre allein gesucht, so erhält man

$$c = \frac{b}{2 \sin \frac{1}{2}v}$$

und $$\sin \frac{1}{2}v = \frac{b}{2c}$$

§. 40. **Lehrsatz.** Die ganze Grundlinie in einem solchen Dreyecke ist auch gleich dem Produkt einer Seite in den Sinus des ganzen obern Winkels durch den Kosinus desselben halben Winkels dividiert.

Satz Fig. 138

$$b = \frac{c \times \sin v}{\cos \frac{1}{2}v}$$

Beweis.

Man mache den Schenkel zum Radius, und ziehe den Sinus des ganzen Scheitelwinkels, so ist

Δ acd $\sim$ Δ bhd wegen gemeinschaftlichen und rechten Winkel

also $ad : ac = bd : bh$

oder $c : \cos\frac{1}{2}v = b : \sin v$

$\cos\frac{1}{2}v \times b = c \times \sin v$

$$b = \frac{c \times \sin v}{\cos\frac{1}{2}v}$$

§. 41. **Zusatz.** Will man den Sinus des ganzen Winkels in lauter trigonometrischen Größen bekommen, so substituiere man so in obiger Proportion:

$ad : ac = bd : bh$

$1 : \cos\frac{1}{2}v = 2\sin\frac{1}{2}v : \sin v$

$\sin v = 2\sin\frac{1}{2}v \times \cos\frac{1}{2}v$

§. 42. **Zusatz.** Eben dieß erhält man auch, wenn man die beyden Werthe von b, welche oben gefunden worden, in eine Gleichung sezt und fort kalkuliert, bis man sin v allein hat. Es ist demnach

1) $b = 2c \times \sin\frac{1}{2}v$ | §. 30.

2) $b = \dfrac{c \times \sin v}{\cos\frac{1}{2}v}$

$$2c \times \sin\tfrac{1}{2}v = \frac{c \times \sin v}{\cos\frac{1}{2}v}$$

:c

$$2\sin\tfrac{1}{2}v = \frac{\sin v}{\cos\frac{1}{2}v}$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}v \times \cos\tfrac{1}{2}v = \sin v$$

§. 43. **Anmerk.** Diese und andere dergleichen Ausdrücke werden uns bey Berechnung der Polygone sehr gut zu statten kommen.

§. 44. **Lehrsatz.** Der Sinus eines halbierten solchen Winkels ist auch gleich der Quadratwur-

wurzel aus dem halben Sinusverſus des ganzen Scheitelwinkels, oder auch: weniger dem Koſinus halbiert.

Satz. Fig 138

$$\sin \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}}$$

Beweis.

$$ad : cd = bd : \sqrt{hd}$$

ſubſt. $$1 : \sin \tfrac{1}{2} v = 2 \sin \tfrac{1}{2} v : (1 - \cos v)$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} v = 1 - \cos v$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} v = \frac{1 - \cos v}{2}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}}$$

§. 45. **Anmerk.** Ob ich gleich wegen Vermeidung der Weitläuftigkeit nicht geſinnet war, von dieſem Satze Gebrauch zu machen, ſo konnte ich doch nicht umhin, ſelben den übrigen Lehrſätzen der Trigonometrie einzuverleiben; um zu beweiſen, wie kurz und faßlich ſich dieſe mathematiſche Wahrheit erhärten läßt; da doch Klemm in ſeinem Lehrbuche §. 735 eine ſo unnöthige Länge und Schwierigkeit dabey affektiert.

Berechnung der Dreyecke.

§. 46. **Eintheilung.** Sämmtliche Aufgaben der ebnen Trigonometrie können füglich in drey Klaſſen abgetheilt werden. Zur erſten gehören jene Fälle, wo eine Seite und zween Winkel, folglich auch mittelbar der dritte, gegeben ſind. Zur zweyten, wenn zwo Seiten und ein Winkel gegeben ſind. Und zur dritten gehört ein einziger Fall, wenn nämlich alle Seiten bekannt ſind, man ſoll die Winkel beſtimmen.

Erſte

Erste Klasse.

§. 47. **Zusatz.** Weil bey den Aufgaben dieser Klasse jeder zu bestimmenden Seite ein Winkel entgegengesetzt ist, so lassen sich alle Aufgaben derselben aus dem obigen Lehrsatze vom Verhältniße der Seiten zu den Sinussen der Gegenwinkel auflösen.

§. 48. **Aufgabe.** Es halte in dem Dreyecke Fig. 139 a b c der Winkel a = 36°,19′ der Winkel b = 44°5′, und die Seite b c = 126′; wie groß ist die Seite a b?

Auflösung. Weil a b dem Winkel c entgegensteht, so muß erst c bestimmt werden. Es ist aber c = 180° − (36,°19′ + 44°,5′) = 180° − 80,°24′ = 99°,36′. Allein stumpfe Winkel haben in den Tafeln keine Sinusse, also muß der Nebenwinkel von 99,°36, gesucht werden, folglich 180° − 99°,36′ = 80°,24′; weil zween Nebenwinkel einerley Sinus geben.

Nun ist ferner a b : sin c = b c : sin a
substit. x : sin 80,°24′ = 126′ : sin 36°,19′
In den Tafeln x : 0,985996 = 126 : 0,5922476
x × 0,5922476 = 0,985996 × 126
= 124,235496
x = 124.235496
0,5922476
x = 209,7″

§. 49. **Anmerk.** Ungleich kürzer fallen aber dergleichen Rechnungen aus, wenn man sich der Logarithmen bedient, die in den Tafeln allemal daneben zu stehen pflegen. Man sieht aus der Proportion also gleich, wessen Logarithmen zusamm addiert, und was für einer abgezogen werden müsse.

Die

Die Rechnung sieht nun so aus.

Log. sin 80° = 9,9938752
Log. 126 = 2,1003705

12,0942457

Log. 36°19′ = 9,7725033

2,3217424

Weil dieser Logarithm einer Seite entsprechen muß, so wird er bey den natürlichen Zahlen aufgeschlagen, wo ihm die obige Zahl 209,7 zugehört.

§. 50. **Anmerk.** Von der Natur und dem Gebrauche der Logarithmen ist zwar schon in der Algebra unter seinem Artikel umständlich geredet worden. Doch muß hier noch hie und da etwas von den Logarithmen trigonometrischer Linien erinnert werden. Die Grundlage oder Basis derselben ist die Eintheilung des Radius in 10000000000 gleiche Theile, wie es Pitiskus in seinem großen Kanon gethan. Daher hat der Logarithm des Sinus totus zum Kennziffer 10. In den gemeinen Tafeln, wie in Blaks oder Wolfs seinen, ist der Radius zwar nur in 10000000 Theile getheilt, folglich müste der Logarithm vom Sinus totus zum Kennziffer die Zahl 7 haben, aber er hat dem ungeachtet 10; und alle Kennziffer durchaus sind um 3 zu groß, weil sie aus den obbemeldten Kanon ausgeschrieben worden. Es bringt indeß diese Unrichtigkeit keinen Fehler in die Rechnung; da bey Proportionen, wenn grosse Kennziffer addiert und dann wieder abgezogen werden, immer das nämliche bleibt. Es sind ferner Blaks, Wolfs, u. a. dgl. Tafeln so eingerichtet, daß man mit jedem aufgeschlagenen Blatte zween Winkel oder Bögen antrift, den einen diesseits, den andern jenseits, welche miteinander 90° machen: folglich wenn auf der einen Seite Sinusse und Tangenten sind, so befinden sich auf der andern Seite die Kosinusse und Kotangenten, und so auch umgekehrt. Z. B. man schlägt den Sinus von 20° auf, so steht gerade über auch der Sinus von 70°, das ist sein Kosinus, u. s. f. Die Sekanten und Sinusversus sind wegen ihrer Entbehrlichkeit ganz weggelassen worden. Im Fall man aber ihrer nöthig hätte, so sind sie und ihre Logarithmen bald gefunden. Es darf nur, gemäß der
* §. 24. Formel sec = $\frac{1}{\text{cos}}$ und sinvers. = 1 — cos verfahren werden.

Endlich für stumpfe Winkel ist kein Sinus anzutreffen. Weil aber bekannt ist, daß zween Nebenwinkel einerley Sinusse haben, so muß also allemal des stumpfen Winkels Komplement zu 180° genommen und aufgesucht werden.

§. 51.

§. 51. **Zusatz.** Bey den Aufgaben der ersten Klasse kann also trigonometrisch nur um eine Seite des Dreyeckes gefragt werden; denn der dritte Winkel bestimmt sich schon arithmetisch.

Zweyte Klasse,
wenn zwo Seiten und ein Winkel gegeben ist.

§. 52. **Eintheilung.** Entweders befindet sich der gegebne Winkel nicht zwischen den gegebnen Seiten: oder er ist von selben eingeschlossen.

Erster Fall.

§. 53. **Anmerk.** Hier wird allemal etwas vom Gegebnen und Gesuchten nach §. 34 gegeneinander stehen. Es muß aber oft vorher ein anders Stück gefuuden werden, um das Verlangte zu erhalten. Z. B. Es soll ein Winkel gefunden werden, dem gerade keiue gegebne Seite entgegen steht. Man suche also allererst den andern Winkel, dem gewiß eine bekannte Seite opponiert ist, so wird der dritte als Komplement zu 180° auch bekannt seyn.

§. 54. **Aufgabe.** Es sey Fig. 140 in dem Dreyeckeabc ab = 250′
c = 76°19
bc = 184′ und a = x°

Auflösung. Weil hier alles einander gegenübersteht, so ist

ab : bc ≐ sin c : sin a
subst. 250 : 184 = sin 76°19′ : sin x

Log. 184 = 2,2648178
Log. 76,°19 = 9,9874955

12,2523133
Log. 250 2,3979400

9,8543733 = Log. x Welchem die Größe 45°,39′ entspricht.

§. 55. Aufgabe. In dem Dreyeck b d f Fig. 141

sey b = 133°20′
b f = 300′
f d = 514′
b d = x

Auflösung. Weil der Seite bd auch ein unbekannter Winkel entgegensteht, so muß allererst der andere Winkel gefunden werden. Man bestimme zuvor den Nebenwinkel von 133°,20′. Er ist 180° — 133°,20 = 46°,40′.

Es ist demnach

fd : bf = sin b : siu d

subst. 514′ : 300′ = sin 46°40′ : sin x

Log. 300 = 2,4771213
Log. sin 46°,40′ = 9,8617576

12,3388789

Log. 514 = 2,7109631

Log. x = 9,6279158

Die entsprechende Zahl dafür ist 25°7′ = d Es machen nun die beyden Winkel 133°20′ + 25°,7′ = 158°,27′; folglich der dritte Winkel 180° — 158°,27′ = 21°33′ = f. Nun ferner

bd : fb = sin f : sin d

x : 300 = sin 21°,33′ : sin 25°7′

Log. 300 = 2,4771213
Log. sin 21°,33′ = 9,5650363

12,0421576

Log. sin 25°,7′ = 9,6278397

Log. b d = 2,4143179 dessen zugehörige Zahl 259,6″ ist.

Zwey

Zweyter Fall.

§. 56. Zusatz. In Aufgaben von Dreyecken, wo zwo Seiten und der zwischenliegende Winkel gegeben sind, weis man zwar die Summe der übrigen zween Winkel, aber ihre Differenz nicht. Hätte man auch diese, so würde nach der Algebra die halbe Summe sammt der halben Differenz den grössern Winkel von beyden geben; und die halbe Summe weniger der halben Differenz den kleinern Winkel.

§. 57. **Lehrsatz.** Die halbe Differenz der übrigen zween Winkel läßt sich in diesem Fall allemal bestimmen; denn es verhält sich die Summe der gegebnen Seiten zu ihrer Differenz; wie die Tangente der halben Summe der übrigen beyden unbekannten Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz.

Satz. Fig. 142

$$(a\,d + a\,b) : (a\,d - a\,b) = \text{tang}\,\frac{b+d}{2} : \text{tang}\,\frac{b-d}{2}$$

Beweis.

Man beschreibe mit der kleinern gegebnen Seite aus dem Scheitelpunkt des gegebnen Winkels einen Zirkel, verlängere die größere von den gegebnen Seiten um die Größe des Radius rückwärts, verbinde immer zween Radiusse mit Sehnen und ziehe mit einer der Sehnen vom Endpunkt der größern Seite eine Linie parallel, bis die andere verlängerte Sehne sie schneidet, so ist

$$m = o + n$$

auch $m = b + d$

$o + n = b + d$; aber $o = n$

also

also $2n = b + d$ und $n = r + d$

subst. $2(r + d) = b + d$

$:2 \quad r + d = \frac{b + d}{2}$; der halben Summe

$\times 2 \quad 2r + 2d = b + d$

$2r = b - d$

$:2 \quad r = \frac{b - d}{2}$ der halben Differenz.

Nun ist wegen dem Parallelschnitt in dem Dreyecke gfd

$gd : cd = gf : bf$ oder

$(ad + Rad) : (ad - Rad) = \text{tang}(r + d) : \text{tang } r$

subst. $(ad + ab) : (ad - ab) = \text{tang}\frac{(b + d)}{2} : \text{tang}\frac{(b - d)}{2}$

Anwendung. Es sey $ad = 59°$

$ab = 37°$

$a = 57°34'$

Folglich $b + d = 180 - 57°34'$

$= 122°,26'$

Proportion $(59° + 37°) : (59° - 37°) =$

$= \text{tang}\frac{122°,26'}{2} : \text{tang } x$

abgek. $960 : 220 = \text{tang } 61°,13' : \text{tang } x$

Log. 220 = 2,3424227

Log. tang 61°,13 = 10,2601304

12,6025531

Log. 960 = 2,9822712

Log. tang x = 9,6202819, welchen ein Bogen von 22°38' entspricht, der die halbe Differenz der beyden unbekannten Winkel ausdrückt. Wird dieß nun zur halben Summe 61°,13' addiert, nämlich 61°13' + 22°38' = 83°,51' so hat man den größern Winkel; zieht man sie aber von einander ab 61°13' — 22°,38' = 38°35' so wird dieß der kleine Winkel d seyn.

§. 58.

§. 58. Zusatz. Sind einmal die Winkel da, so ist nichts leichters, als auch die dritte Seite zu finden.

§. 59. Zusatz. Bey rechtwinklichten Dreyecken darf dieser Fall nicht so mühsam berechnet werden; denn es läßt sich allemal aus zwo gegebnen Seiten die dritte durch den pythagorischen Lehrsatz finden; und ist diese einmal da, so hat es keine Mühe mehr, auch die Winkel zu bestimmen.

§. 60. Zusatz. Indeß kann die Sache auch bey schiefwinklichten Dreyecken durch lauter Sinusse abgethan werden. Man fälle vom Endpunkte der kleinern gegebnen Seite auf die größere einen Perpendikel herab, so entstehen zwey Dreyecke, nämlich Fig. 143 a b c und a c d. Man ziehe ferner den bekannten Winkel von 90° ab, so ist auch der Winkel o gefunden. Nun um a c und b c zu finden, dienen folgende Proportionen a c : a b = sin b : sin tot. Dann b c : a b = sin o : sin tot. Es sind also, wenn das gefundene b c von b d abgezogen wird in dem rechtwinklichten Dreyeck a c d zwo Lothen sammt dem eingeschloßnen rechten Winkel bekannt, wo dann alles übrige leicht zu finden ist.

Dritte Klasse.

§. 61. Lehrsatz. In Dreyecken, wo alle Seiten bekannt sind, ist der Kosinus des mittleren Winkels gleich der Summe der Quadraten von der grösten und kleinsten Seite, weniger dem Quadrat der mittleren Seite, dieß alles dividiert durch das doppelte Produkt der kleinsten und grösten Seite. Wenn demnach Fig. 144 a die gröste, b die mittlere, c die kleinste Seite, und m den mittleren Winkel bedeutet, so ist der

Satz.

$$\text{cof m} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}$$

Beweis.

Man beschreibe mit der kleinsten Seite aus dem größern anliegenden Winkel derselben einen Zirkel durch das Dreyeck, verlängere die mittlere Seite um den Radius, damit sie sammt der grösten Seite Sehnen werden, die sich außer der Peripherie durchschneiden. Es ist also nach §. 167 Geom.

$$k\,b \times b\,g = b\,i \times b\,f$$

aber $k\,b = a\,b + \text{Rad}$

oder $= a\,b + a\,i$

und $b\,g = a\,b - \text{Rad}$

oder $= a\,b - a\,i$

subst. $(a\,b + a\,i) \times (a\,b - a\,i) = b\,i \times b\,f$

oder $(b + c)\,(b - c) = a\,x$

$b^2 - c^2 = a\,x$

$$\frac{b^2 - c^2}{a} = x = b\,f$$

Wenn nun b f vom ganzen b i abgezogen, und der Rest als Sehne halbiert wird, so hat man den Werth des Kosinus von i in einem Ausdrucke, wo der Radius die kleinste Seite bedeutet. Daher $a - \frac{b^2 + c^2}{a} = f\,i$

$$a - \frac{b^2 + c^2}{a} = f\,i$$

oder $$\frac{a^2 - b^2 + c^2}{a} = f\,i$$

;2 $$\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2\,a} = f\,i = d\,i = \text{cof m}$$

weil a d der Sinus von $\frac{m}{2}$ ist.

Will

Will man nun, daß der Radius nicht die ganze kleinste Seite, sondern eine Einheit bedeuten soll, so gilt folgende Proportion

$$R : \text{Cos}\, m = r : \text{cos}\, m \quad \S.\ 31.$$

subst. $$c : \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} = r : \text{cos}\, m$$

$$\text{cos}\, m \times c = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

$$\text{cos}\, m = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}$$

Anwendung. Es sey in dem Dreyeck a b c

$$bi = 76 = a$$
$$ab = 68 = b$$
$$ai = 52 = c$$

also $$\text{cos}\, i = \frac{76^2 - 68^2 + 52^2}{2 \times 76 \times 52}$$

$$= \frac{5776 - 4624 + 2704}{7904}$$

$$= \frac{3856}{7904} = 0{,}48784 \text{ u. s. f.}$$

Wird nun dieß in den Sinustabellen nachgeschlagen, so findet man gerade gegenüber den Kosinus von 60°48′ als des ihm nächst entsprechenden Winkels.

§. 62. **Zusatz.** Indeß scheint die Rechnung immer kürzer und leichter zu seyn, wenn man mit dem Beweise auch gleich die Auflösung mit einflechtet. Z. B. wenn das Segment b f Fig. 144 durch Logarithmen gefunden ist, und nach Abzug desselben von b i, mit der Hälfte und den darauf gefällten Perpendikel folgende Proportion angestellt wird.

$$a\,i : d\,i = \text{sin}\, r : \text{sin}\, o \quad \text{oder}$$

weil $$\text{sin}\, o = \text{cos}\, m \quad \text{ist}$$

$$a\,i : d\,i = \text{sin}\, 90 : \text{cos}\, m$$

§. 63. **Zusatz.** Obige Formel fällt stark zusamm, wenn das Dreyeck gleichschenklicht ist. Denn bey spitzwinklichten wird die Seite $a = b$ und bey stumpfwinklichten $b = c$ seyn; folglich ist im ersten Fall

$$\cos m = \frac{a^2 - a^2 + c^2}{2ac} = \frac{c^2}{2ac} = \frac{c}{2a}$$

Im zweyten Fall

$$\cos m = \frac{a^2 - b^2 + b^2}{2ac} = \frac{a^2}{2ac} = \frac{a}{2c}$$

Anwendung der Trigonometrie auf Polygone und Zirkelabschnitte.

§. 64. **Lehrsatz.** Die Seite eines regulären Vieleckes läßt sich aus dem Zentralwinkel und dem Polygonradius trigonometrisch bestimmen. Es ist, wenn der Polygonradius $= a$, der Zentralwinkel $= c$, und die Seite $= l$ heißt, der

Satz

$$l = 2a \sin \tfrac{1}{2} c$$

Beweis.

Es ist §. 38 erhärtet worden, daß in jedem gleichschenklichten Dreyecke $b = 2c \times \sin \frac{1}{2} v$. Da aber hier b die Polygonseite, c den Polygonradius und v den Zentralwinkel bedeutet, so ist nach der Substitution der Satz vollkommen erwiesen.

§. 65. **Zusatz.** Wird statt c die Anzahl der Seiten gegeben, so ist, weil $c = \frac{360}{n}$, mehrmal

$$l = 2a \sin \tfrac{1}{2} \times \frac{360}{n} = 2a \sin \frac{180}{n}$$

§. 66.

§. 66. **Lehrsatz.** Der Flächeninhalt eines regulären Polygones ist gleich dem halben Produkte des Sinus vom Zentralwinkel in das Quadrat des Polygonradius durch die Anzahl der Seiten multipliciert.

Satz.

$$Q = \frac{n\,a^2 \sin c}{2}$$

Beweis.

Die Basis eines Zentraldreyeckes ist der Seite gleich also

$$b = 2\,a \times \sin \tfrac{1}{2} c$$

der Perpend. $p = a \cos \tfrac{1}{2} c$ denn Fig. 145 ist

$$cg : cd = \sin d : \sin 90 \quad \text{oder}$$

$$p : a = \cos \tfrac{1}{2} c : 1 \quad \text{d. i. } p = a \cos \tfrac{1}{2} c$$

$$\text{mult. } b\,p = 2\,a^2 \sin \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} c$$

Aber es ist oben §. 41 erwiesen worden

daß $2 \sin \tfrac{1}{2} c \times \cos \tfrac{1}{2} c = \sin c$

$$\text{subst. } b\,p = a^2 \sin c$$

$$:2 \quad \Delta \frac{b\,p}{2} = \frac{a^2 \sin c}{2}$$

Es sind aber beym Polygon n solcher $\Delta\,\Delta$

$$\times n \quad n\,\Delta = \frac{n\,a^2 \sin c}{2}$$

$$\text{oder} \quad Q = \frac{n\,a^2 \sin c}{2}$$

§. 67. **Zusatz.** Weil $c = \frac{360°}{n}$, so wird eben darum auch allgemein $Q = \frac{n\,a^2 \sin \frac{360°}{n}}{2}$ seyn.

§. 68. **Zusatz.** Will man diese Ausdrücke logarithmitsch berechnen, so wird am Ende vom Kenn-

ziffer

ziffer allemal 10 weggestrichen; weil der Sinus totus überall = 1 gesetzt, das heißt, ausgelassen worden.

§. 69. **Anmerk.** Man vergleiche unsern Satz mit Klemms Lehrbuche §. 764, wende sie auch beyde praktisch an, und sehe dann, welcher richtiger ist. Klemm hat darinn geirrt, daß er den Polygonradius mit dem trigonometrischen Radius verwechselte. Anfangs bezeichnete er zwar jenen mit a, und diesen durch r; allein mitten im Beweise fängt er wieder an: ist nun r = a, so ist u. s. f. Dieß kann aber nicht statt finden; weil der trigonometrische Radius immer einen beständigen Werth beybehält, da ihn der andere nach Belieben verändern kann, ohne die Allgemeinheit des Satzes zu stören Nichts wundert mich mehr, als jene neue Auflage des Klemms, die Remigius Döttler, Priester der frommen Schulen in Wien 1786 veranstaltet, wo alle Fehler desselben, deren es doch mehrere giebt, wieder getreulich abgedruckt wurden. Vielleicht hätte ich das nämliche Schicksal, wenn ich mir beygehen ließ, irgend ein hebräisches Werkchen von neuem heraus zu geben. Döttler verspricht überdieß auf dem Titelblatte Anmerkungen und Erläuterungen, wovon ich aber fast gar keine fand, obwohl sie dem Studierenden an manchen Orten sehr willkommen gewesen wären.

§. 70. **Lehrsatz.** Das Segment eines Zirkels ist, wenn r den Radius, c die Grade des Bogens, und π die Zahl 3,14 bedeutet, dem Ausdrucke: $\left(\frac{c\,\pi}{360} - \frac{\sin c}{2}\right) r^2$ gleich.

Beweis.

Der Sektor ist, wie §. 209. Geom. gezeigt worden, wenn statt a das c substituiert wird $= \frac{c\,r^2\,\pi}{360^\circ}$.

Ferner, wie wir eben gefunden, ist der Inhalt jenes gleichschenklichten Dreyeckes, das davon abgezogen werden muß, wenn r den Schenkel bedeutet $\frac{r^2 \sin c}{2}$

Folglich der Rest oder das Segment $\frac{c\,r^2\,\pi}{360} - \frac{r^2 \sin c}{2}$
$= \left(\frac{c\,\pi}{360} - \frac{\sin c}{2}\right) r^2$

§. 71.

§. 71. Zusatz. Ist der Bogen 180°, so wird der Sinus = 0 und der Ausdruck ändert sich in diesen um: $\left(\frac{180\,\pi}{360} - 0\right) r^2 = \frac{\pi\, r^2}{2}$ welches die halbe Zirkelfläche ausdrückt.

§. 72. **Anmerk.** Es wäre noch ein weites Feld übrig, wie aus verschiednen gegebnen Stücken eines Dreyecks, Vierecks u. s. f. der Inhalt derselben, oder andere Größen gefunden werden können; doch, um nicht zu weitläuftig zu werden, wollen wir sie weglassen.

Von Erfindung der Sinusse nfacher Bögen, als ein Anhang zur ebnen Trigonometrie.

Man versteht unter dieser Anweisung die Lehre, wie aus dem bekannten Sinus eines Bogens z. B. des Bogens von 30° die Sinusse aller übrigen Bögen gefunden werden können. Darüber sind mir zwo Methoden bekannt; eine vom Wolf, die andere von Klemm. Erstere ist zwar richtig, aber nicht aus der Natur der Sache selbst; sondern durch einen Umweg hergeholt. Letztere beruht auf chimerischen Größen, und ist überaus mühsam. Ich wollte daher keinen dieser Wege einschlagen, sondern mir eine neue Bahn eröffnen, wo dieß Geschäft eine weit natürlichere Wendung bekommen soll; allein ich erblickte eine geraume Zeit nachher fast die nämliche Verfahrungsart bey Hrn. v. Segner, welches mich natürlich theils erfreuen, theils auch böse machen mußte.

Ein

Ein Paar Lehrsätze müssen wir voraus schicken, und dann läßt sich die Sache einlenken. Hier sind sie sammt ihren Beweisen.

§. 73. **Erster Lehrsatz.** Der Summsinus zweener Bögen, deren Radius eins gelten soll, ist die Summe der wechselweise in einander multiplicierten Sinusse und Kosinusse der einzelnen Bögen. Es heiße der Winkel eines Bogens m, des andern o, die Summe derselben s, so ist der

Satz Fig. 146

$$\text{Sin } s = \text{sin } o \times \text{cos } m + \text{sin } m \times \text{cos } o$$

Beweis.

Man ziehe die Winkel, Bögen und Sinusse wirklich, so wird, wegen Aehnlichkeit der Dreyecke folgendes Paar Verhältnisse statt haben.

$$fa : fs = df : cf \quad \text{oder}$$
$$\text{sin } s - cf : \text{cos } o - df = df : cf$$

Aber cf und df zu finden ist auch

$$cf : cd = bs : hs \quad \text{oder}$$
$$cf : \text{sin } o = 1 : \text{cos } m \quad \text{also}$$
$$cf = \frac{\text{sin } o}{\text{cos } m}$$

Und $cd : df = hs : bh$ oder

$$\text{sin } o : df = \text{cos } m : \text{sin } m$$
$$df = \frac{\text{sin } o \times \text{sin } m}{\text{cos } m}$$

Diese Werthe nun in der erstern Gleichung substituiert, so erhält man

(sin s

$$\left(\sin s - \frac{\sin o}{\cos m}\right) : \left(\cos o - \frac{\sin o \sin m}{\cos m}\right)$$

$$= \frac{\sin o \sin m}{\cos m} : \frac{\sin o}{\cos m}$$

abgek. $\left(\sin s - \frac{\sin o}{\cos m}\right) : \left(\cos o - \frac{\sin o \sin m}{\cos m}\right)$

$$= \sin m : 1$$

$$\sin s - \frac{\sin o}{\cos m} = \sin m \cos o - \frac{\sin o \sin^2 m}{\cos m}$$

$$\sin s = \sin m \cos o + \frac{\sin o}{\cos m} - \frac{\sin o \sin^2 m}{\cos m}$$

$$\sin s = \sin m \cos o + \frac{(1 - \sin^2 m) \sin o}{\cos m}$$

aber $1 - \sin^2 m = \cos^2 m$ subst. §. 10.

$$\sin s = \sin m \cos o + \frac{\cos^2 m \sin o}{\cos m}$$

$$\sin s = \sin m \cos o + \cos m \sin o$$

$$\sin s = \sin m \cos o + \cos m \sin o$$

§. 74. Zusatz. Wären nun die beyden Bögen der Winkel o und m gleich, so würde $s = 2m = 2 \times o$ seyn; also $\sin 2m = \sin m \cos m + \sin m \cos m$

oder $\sin 2m = 2 \sin m \cos m$

§. 75. Zusatz. Setze man ferner o wäre noch so groß als m, das ist $o = 2m$, so würde $s = 3m$ seyn. Wenn nun in der obigen Formel $\sin s = \sin m \cos o + \cos m \sin o$ subst. wird, so giebt es

$$\sin 3m = \sin m \cos 2m + \cos m \sin 2m$$

Allein der Kosinus vom doppelten Winkel ist noch unbekannt, ob wir gleich den Sinus desselben wissen: ihn zu finden dient aber folgender Lehrsatz.

§. 76. Zweyter Lehrsatz. Der Summkosinus zweener Bögen ist das Produkt der Kosi-

nusse

nusse einzelner Bögen, weniger dem Produkt ihrer Sinusse. Es sey alles wie vorhin, so ist der

Satz

$$\cos s = \sin o \sin m - \cos o \cos m$$
$$\cos o \cos m - \sin o \sin m.$$

Beweis.

$$as : fs = cd : fc \quad \text{oder}$$
$$\cos s : \cos o - df = \sin o : cf$$
$$\text{aber} \quad cf : cd = bs : hs \quad \text{oder}$$
$$cf : \sin o = 1 : \cos m$$
$$\text{also} \quad cf = \frac{\sin o}{\cos m}$$
$$\text{Und} \quad df : cd = bh : hs$$
$$df : \sin o = \sin m : \cos m$$
$$\text{also} \quad df = \frac{\sin o \sin m}{\cos m}$$

Man substituiere nun die beyden gefundenen Werthe für df und cf in der ersten Gleichung

$$\cos s : \cos o - df = \sin o : cf$$
$$\cos s : \left(\cos o - \frac{\sin o \sin m}{\cos m}\right) = \sin o : \frac{\sin o}{\cos m}$$
$$\cos s = \left(\sin o \cos o - \frac{\sin^2 o \sin m}{\cos m}\right) : \frac{\sin o}{\cos m}$$
$$= \left(\sin o \cos o - \frac{\sin^2 o \sin m}{\cos m}\right) \times \frac{\cos m}{\sin o}$$
$$= \frac{\sin o \cos o \cos m}{\sin o} - \frac{\sin^2 o \sin m \cos m}{\cos m \sin o} \text{ abgek.}$$
$$\cos s = \cos o \cos m - \sin o \sin m$$

§. 77.

§. 77. Zusatz. Setze man, nun wie vorhin, o = m so ist s = 2 m und cos o = cos m; sin o = sin m. Folglich

$$\cos 2m = \cos m \cos m - \sin m \sin m$$
$$\cos 2m = \cos^2 m - si^2 m$$

§. 78. Zusatz. Nun sind wir auch im Stande in der obigen Formel $\sin 3m = \sin m \cos 2m + \cos m \sin 2m$ sowohl für $\sin 2m$, als für $\cos 2m$ die Werthe zu substituieren. Es entsteht §. 74 et 75.

$$\sin 3m = \sin m \times (\cos^2 m - \sin^2 m) + \cos m \times (2 \sin m \cos m)$$
$$\sin 3m = \sin m \cos^2 m - \sin^3 m + 2 \cos^2 m \sin m$$
$$= 3 \sin m \cos^2 m - \sin^3 m$$

§. 79. Zus. Nimmt man ferner wie zuvor an, daß o noch so groß als m sey, so ist s = 3 m und es läßt sich in der Formel $\cos s = \cos o \cos m - \sin o \sin m$ wieder substituieren. Denn weil erstens o = 2 m, so ergiebt sich

$$\cos 3m = \cos 2m \cos m - \sin 2m \sin m$$

Weil zweytens $\cos 2m = \cos^2 m - \sin^2 m$ §. 77.
und $\sin 2m = 2 \sin m \cos m$ §. 74
so ist $\cos 3m = (\cos^2 m - \sin^2 m) \times \cos m - (2 \sin m \cos m) \times \sin m$
$\cos 3m = \cos^3 m - \cos m \sin^2 m - 2 \sin^2 m \cos m$
$= \cos^3 m - 3 \cos m \sin^2 m$

§. 80. Zus. Wenn nochmal angenommen wird, daß o = 3 m, so ist s = 4 m und die Formel $\sin s = \sin o \cos m + \cos o \sin m$ metamorphosiert sich erstens in $\sin 4m = \sin 3m \cos m + \cos 3m \sin m$ §. 80, und nachher durch die Substitution der gefundenen Werthe für $\sin 3m$ und $\cos 3m$ wird §. 73.

Sin

$\sin 4m = (3 \sin m \cos^2 m - \sin^3 m) \times \cos m +$
$(\cos^3 m - 3 \cos m \sin^2 m) \times \sin m$
$\sin 4m = 3 \sin m \cos^3 m - \cos m \sin^3 m + \sin m$
$\cos^3 m - 3 \cos m \sin^3 m$
$\sin 4m = 4 \sin m \cos^3 m - 4 \sin^3 m \cos m$

Zuſ. §. 81. Fährt man fort, ſo auch für den Kosinus des 4fachen Bogens zu ſubſtituieren, ſo erhält man

$$\cos 4m = \cos m^4 - 6 \sin^2 m \cos^2 m + \sin^4 m$$

Zuſ. §. 82. Die Tabelle für die vielfachen Sinuſſe wäre demnach, wenn wir ſtatt Sinus nur ſchlechtweg $\int$, und für Kosinus c ſetzen wollen, folgende

1) $\int$
2) $2 \int c$
3) $3 \int c^2 - \int^3$
4) $4 \int c^3 - 4 \int^3 c$
5) $5 \int c^4 - 10 \int^3 c^2 + \int^5$
6) $6 \int c^5 - 20 \int^3 c^3 + \int^5 c$
7) $7 \int c^6 - 35 \int^3 c^4 + 21 \int^5 c^2 - \int^7$

Hält man demnach die Würden von $(c + \int)$ in ſteigender Ordnung gegen dieſe Tabelle, ſo läßt ſich die allgemeine Formel für den Sinus des nfachen Bogens leicht abziehen. Denn man betrachte die ſteigenden Würden hier

$(c+\int)^1 = c+\int$
$(c+\int)^2 = c^2+2c\int+\int^2$
$(c+\int)^3 = c^3+3c^2\int+3\int^2 c+\int^3$
$(c+\int)^4 = c^4+4c^3\int+bc^2\int^2+4c\int^3+\int^4$
$(c+\int)^5 = c^5+5c^4\int+10c^3\int^2+10c^2\int^3+5c\int^4+\int^5$
$(c+\int)^6 = c^6+6c^5\int+15c^4\int^2+20c^3\int^3+15c^2\int^4$
$+6c\int^5+\int^6$
$(c+\int)^7 = c^7+7c^6\int+21c^5\int^2+35c^4\int^3+35c^3\int^4$
$+21c^2\int^5+7c\int^6+\int^7;$

so wird man finden, daß immer das zweyte, vierte, sechste Glied u. s. f. jeder Würde mit abwechselnden Zeichen die Formel für den nämlichen vielfachen Sinus geben. Da nun die nte Würde von $(c + \int)$ nach dem Binomium des Neutons, diese Reihe giebt:

$$c^n + \frac{n}{1} c^{n-1} \int + \frac{n \times (n-1)}{1 \times 2} c^{n-2} \int^2 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3}$$
$$c^{n-3} \int^3 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$
$$c^{n-4} \int^4 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$$
$$c^{n-5} \int^5 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \times (n-5)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$$

$c^{n-6} \int^6$ u. s. f., so ist klar, daß der Sinus des nfachen Bogens $= \frac{n}{1} c^{n-1} \int - \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3}$

$$c^{n-3} \int^3 + n \times \frac{(n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$$
$$c^{n-5} \int^5 - \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \times (n-5)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$$
$$\times (n-6)\ c^{n-7} \int^7 \text{ u. s. f.}$$

Zus. §. 83. Auf eben diese Art läßt sich auch eine allgemeine Formel für den Kosinus des nfachen Bogen ausfindig machen. Denn, wenn man die obigen zerstreuten 4 ersten Kosinusse sammelt, und zu kalkulieren fortfährt, so ergiebt sich folgende Tabell, woraus sich wieder leicht eine allgemeine Formel für den Kosinus des nfachen Bogens abziehen läßt.

1) c
2) $c^2 - \int^2$
3) $c^3 - 3 c \int^2$
4) $c^4 - 6 \int^2 c^2 + \int^4$
5) $c^5 - 10 c^3 \int^2 + 5 c \int^4$
6) $c^6 - 15 \int^2 c^4 + 5 \int^4 c^2 - \int^6$
7) $c^7 - 21 c^5 \int^2 + 35 c^3 \int^4 - 7 c \int^6$

§. 84.

§. 84. Zus. Vergleicht man diese Abstammung der Ausdrücke voneinander mit der obigen Würdentabelle, so erhellet offenbar, daß die ungeraden Glieder mit abwechselnden Zeichen für den Kosinus des nämlichen vielfachen Bogens die Formel abgeben. Es ist demnach allgemein der cos des nfachen Bogens $= c^n - \frac{n(n-1)}{1 \times 2} c^{n-2} \int^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} c^{n-4} \int^4$

§. 85. Aufg. Um eine von diesen zwoen allgemeinen Formeln in einem besondern Falle anzuwenden, wollen wir durch die erstere den Sinus eines Bogens z. B. von 10 Graden finden.

Auflösung. Weil nur der Sinus von 30° allein rational ist nach §. 14 Trig. so wollen wir denselben als den Sinus eines einfachen Bogens zur Basis annehmen. Es wird demnach ein Bogen z. B. von 60° der zweyfache Bogen, der von 90° der dreyfache Bogen u. s. f. seyn. Geht man von 30° rückwärts, so erhellet, daß ein Bogen (setzen wir von 15°) um sich nach einer ähnlichen Art auszudrücken, der halbfache, also von 10° der drittelfache Bogen von obiger Basis seyn müsse.

In unser Formel:

$$\sin n = n\, c^{n-1} \int - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} c^{n-3} \int^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} c^{n-5} \int^5 \text{ u. s. f.}$$

ist nun $n = \frac{1}{3}$

$\int = \frac{1}{2}$

und $c = \sqrt{\frac{3}{4}}$ §. 20. Trig.

Deutlichkeits halber wollen wir jedes Glied der Generalformel besonders berechnen, und, weil ihre

unend-

unendliche Reihe schnell zusamm fällt, uns mit 2 oder 3 Glieder begnügen. Das erste Glied giebt nach der Substitution $\frac{1}{3} \times (\sqrt{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \times (\sqrt{\frac{3}{4}})^{-\frac{2}{3}}$

$$= \frac{1}{6 \times (\sqrt{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{6 \sqrt[3]{\frac{3}{4}}} =$$

$$\frac{1}{6 \times 0{,}0909} = \frac{1}{0{,}5454} = 0{,}18335\ldots$$

Auf die nämliche Weise muß auch das zweyte Minusglied nach gehöriger Substitution berechnet, und von dem eben gefundenen abgezogen werden. Es ist demnach

$$\frac{\frac{1}{3} \times (\frac{1}{3} - 1) \times (\frac{1}{3} - 2) \times (\sqrt{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}-3} \times (\frac{1}{2})^3}{1 \times 2 \times 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times -\frac{2}{3} \times -\frac{5}{3} (\sqrt{\frac{3}{4}})^{-\frac{8}{3}} \times \frac{1}{8}}{6}$$

$$= \frac{\frac{10}{27} \times \frac{1}{8}}{6 (\sqrt{\frac{3}{4}})^{\frac{8}{3}}} = \frac{10}{216 \times 6 (\sqrt{\frac{3}{4}})^{\frac{9}{3}}}$$

$$= \frac{5}{108 \times 6 \sqrt[3]{(\frac{3}{4})^4}} = \frac{5}{648 \sqrt[3]{\frac{81}{256}}}$$

$$= \frac{5}{648 \times \frac{4{,}31}{6{,}35}} = \frac{5}{2792{,}88 : 6{,}35}$$

$$= \frac{5}{440} = 0{,}0114$$

Wird diese Zahl von der obigen abgezogen: $0{,}18335 - 0{,}0114 = 0{,}17195$, so hat man den Sinus schon in Hunderttheilchen, wie aus der Vergleichung mit den Tafeln erhellet, wo selber auf 0,1736482 angesetzt ist. Wenn nun auch das dritte Glied gesucht und addiert würde, so hätte man den Sinus in Tausendtheilchen u. s. f.

Indeß

Zus. §. 86. Indeß ist man nicht benöthigt, alle Sinusse so mühsam zu bestimmen; denn hat man den Sinus von 10° einmal so genau als möglich berechnet, so kann der Sinus von 80° als sein Kosinus ungemein leichter durch die Formel $\cos = \sqrt{1 - \sin^2}$ gefunden werden. Will man ferner den Sinus von 20° oder 30° u. s. f. so lasse man den eben gefundnen als den Sinus des einfachen Bogen gelten, und substituiere in der allgemeinen Formel für n die Zahl 2, so verwandelt sich die ganze Reihe in den simpeln Ausdruck $2\,c^{2-1}s = 2\,cs$; weil in allen nachfolgenden Gliedern der Faktor $n - 2$ das ist $2 - 2 = 0$ vorkömmt, folglich alle verschwinden müssen.

Eben so ist begreiflich, daß, wenn beym 3fachen Bogen für n die Zahl 3 substituiert wird, alle jene Glieder wieder wegfallen, wo sich der Faktor $n - 3 = 3 - 3 = 0$ einfindet. Es ist auch zugleich aus diesen Verfahren ersichtlich, wie inzwischen auf eine eben so compendiöse Art die allgemeine Formel für Kosinusse nfacher Bögen genutzt werden könne.

Praktische Geometrie.

§. 1. Erklärung.

Sie ist die Fertigkeit, von den Sätzen der Geometrie, auf dem Felde, das ist, bey wirklichen Vermessungen, Gebrauch zu machen.

§. 2. **Anmerk.** Die Werkzeuge, welche man hiezu nöthig hat, lernt man weit leichter durch ihre wirkliche Vorzeigung kennen, als durch weitläuftige, unbefriedigende Beschreibungen und kostspielige Kupfer, welche dieß Werkchen unnöthig vergrößern, und den Preis desselben erhöhen würden. Ich werde mich also hier mit Erklärungen derselben nicht aufhalten, sondern die Kenntniße der gewöhnlichsten Instrumente, als des Meßtischchens, der Dioptern, des Astrolabiums, des Transportärs u. d. gl. voraussetzen.

§. 3. **Zusatz.** Weil sich aus zureichenden Linien und Winkeln alle geometrischen Größen bestimmen lassen, so hat man auf dem Felde nichts weiter nöthig, als Linien und Winkel zu messen.

§. 4. **Erklär.** Eine Fläche in der Natur verjüngen, oder aufnehmen, heißt dieselbe etlichemal beträchtlich kleiner machen, und doch ihre Figur beybehalten. Wenn also z. B. die Linien einer Gegend, einer Revier, die aufgenommen wird, 4000mal kleiner gemacht werden, als sie wirklich

sind, so wird die Fläche, wozu sie gehören, 16 millionenmal kleiner als die Gegend in der Natur; weil sich ähnliche Flächen verhalten, wie die Quadrate ähnlich liegender Linien.

§. 5. **Zusatz.** Einige Linien kann man auf dem Felde durch Stangen, Schnüre oder Ketten, die eine gewisse Länge von etlichen Schuhen haben, unmittelbar messen, andere hingegen müssen erst durch Hilfe gemeßner Linien gefunden werden; ja oft wäre bey einer Linie dieß Geschäft überflüßig, da sie sich schon aus andern bekannten Linien und Winkeln bestimmen läßt.

§. 6. **Anmerk.** Stangen vom Holze haben die Unbequemlichkeit, daß sie bey langen Linien allzu oft angeschlagen werden müßen, und daß die Richtung aller Stangenlagen selten gerade ausfällt. Auf die Schnüre hat die nasse und trokne Witterung allzu beträchtlichen Einfluß, indem sie im ersten Falle merklich verkürzt werden. Folglich bleiben Ketten, wovon jedes Glied einen landüblichen Schuh mißt, und aus 100 solchen Gliedern besteht, das dienlichste Meßwerkzeug.

§. 7. **Aufgabe.** Eine gerade Linie auf dem Felde zwischen zween Punkten abzustecken, von deren einem man zum andern sehen und gehen kann.

Auflösung. Man stecke in diese Endpunkte Meßfahnen senkrecht in die Erde ein; lasse die Kette von einer dieser Fahne so lange gegen die andere fortziehen, bis das letzte Glied an die erste gehalten werden kann; bringe dann das Aug hinter dieser Fahne in eine solche Lage, daß die letzte Meßfahne von dieser bedeckt werde, und lenke den Kettenzieher durch rechts und links Winken so lange, bis auch sein in die Erde gesenkter Stab zugleich mit der letzten Fahne bedeckt werde. Wird nun dieß nach

jeden

jedem Kettenzug wiederhollt, so ist am Ende die gerade Linie abgesteckt.

Der Beweis dieser Verfahrungsart gründet sich auf die Lehre der Optik, wo erwiesen wird, daß jeder Sehstrahl in gerader Linie fortgepflanzt werde: da nun zwischen den beyden Meßfahnen eigentlich nur eine gerade Linie möglich ist, so werden alle Punkte der Absteckstäbe in der nämlichen geraden Linie liegen; weil durch selbe kein einziger Nebenstrahl des Auges verhindert wird; folglich können sie sich in keiner andern, als obbemeldter Linie befinden.

§. 8. **Zusatz.** Sind die beyden Endpunkte der Linie weiter von einander entfernt, als daß einer aus dem andern bequem gesehen werden kann, so mag zwischen ihnen noch eine solche Meßfahne in die Erde gesenkt werden; geht dieß auch nicht wohl an, z. B. durch Wälder, so muß zu andern Kunstgriffen, als zur Boussole (Magnetnadel) u. d. gl. die Zuflucht genommen werden.

§ 9. **Aufgabe.** Einen rechten Winkel auf dem Felde durch Hilfe der Meßkette zu schlagen, oder, was auf eines hinausläuft, einen Perpendikel auf irgend einer Linie zu errichten.

Auflösung. Es ist aus dem pythagorischen Lehrsatze bekannt, daß drey Seiten, deren eine 3, die andere 4, und die dritte 5 Schuh hält, oder (doppelt genommen) von 6, 8 und 10 Schuhen, ein rechtwinklichtes Dreyeck bilden; wenn demnach 18 Schuhe von der Kette angezogen werden, ohne die Lage der Ketteurichtung, worauf man den Perpendikel fällen soll, zu verändern, wie z. B. Fig. 147 die Richtung nach der Linie a b, und befestiget das End

dieses Kettenstückes 6 Schuhe rückwärts, wie hier in c, spanet dann den zehnten Kettenring so lange an, bis es ein Dreyeck giebt, so wird die Linie b d perpendikulär auf a b seyn; weil es unmöglich ist, auf diese Art ein anders, als ein rechtwinklichtes Dreyeck zu errichten.

§. 10. **Aufgabe.** Eine gerade Linie durch Hindernisse, wie z. B. einer kleinen Grube, Pfütze, Dickicht, Weiher, Rinnsalbeugung eines Flußes, u. d. gl. durchzumessen oder abzustecken.

Auflösung. Es soll Fig. 48 die Linie a b gemessen werden. Setzen wir, es sey in y eine solche Pfütze, so messe man vom ersten Endpunkte aus, bis an das Hinderniß, d. i. bis c; hier werde ein rechter Winkel nach §. 9 geschlagen, und die Kette so lange in gerader Richtung fortgezogen, bis wieder bey d unter einen andern rechten Winkel fortgemessen werden kann. Sieht man endlich bey f, daß sich ein Perpendikel auf die wahre Linie fällen läßt, so schlage man mehrmals in f und dann in g rechte Winkel, so wird man in der vorigen Richtung, und f d = g c seyn. Denn wegen rechten Winkeln ist f d parallel mit g c, und c d mit g f; da nun Paralleln zwischen Paralleln gleich sind, so ist f d = g c, was zu erweisen war.

Von Weitenmessungen.

§. 11. **Eintheilung.** Es giebt in allem dreyerley Weiten zu bestimmen, welche sich unmittelbar nicht wohl messen lassen.

I Wenn man zwar von einem Orte zum andern nicht kommen kann, wohl aber von einem dritten willkührlich gewählten Orte zu allen beyden.

II Wenn zwey Oerter so liegen, daß man aus einen willkührlich gewählten Orte zu einem von beyden gelangen kann.

III Wenn zwey Oerter durchaus unzugänglich sind, oder wenigst dafür angenommen werden.

§. 12. **Aufgabe.** Es soll eine Weite von der ersten Art 1) ohne Meßtisch, 2) mit Meßtisch geometrisch, 3) trigonometrisch gemessen werden.

Erste Auflösung. Es seyen x und y die Oerter, deren Entfernung bestimmt werden soll. Man suche demnach einen dritten Ort c, woraus man zu beyden Oertern sehen und in gerader Linie gehen kann, messe mit der Kette wirklich überall hin, nämlich von c nach x und y und trage diese Distanzen auch rückwärts im nämlichen Maase und Richtung, so werden die Endpunkte a und b gerade so weit von einander entfernt seyn, als x und y. Fig. 149.

Beweis.

$$\left.\begin{array}{l} cb = cx \\ ca = cy \end{array}\right\} \text{ aus deren Bedingung.}$$

$m = o$ als Vertikalw.

also $\triangle acb \cong \triangle cxy$

folglich $ab = xy$

§. 13. **Zusatz.** Verstattet es der Platz nicht, die ganzen Linien zurück zu tragen, oder man will sich das Geschäft erleichtern, so dörfen nur die Hälften genommen werden, und diese Abschnittspunkte, sie

mögen

mögen rückwärts oder vorwärts geschehen, um die Hälfte der gesuchten Weite von einander entfernt seyn; denn weil sich die Ganzen wie die Hälften verhalten, so ist

$$ca : cb = dc : cf$$

folglich ist nach §. 143 Geom. df parallel mit ab. Daher auch

$$cd : ca = df : ab$$

aber

$$cd = \tfrac{1}{2}\, ca$$

subst. it.

$$\tfrac{1}{2}\, ca : ca = df : ab$$

: ca

$$\tfrac{1}{2} : 1 = df : ab$$

$$\tfrac{1}{2}\, ab = df$$

und weil

$$ab = xy$$

so ist auch

$$\tfrac{1}{2}\, xy = df.$$

§. 14. **Zusatz.** Der nämliche Beweis gilt auch von der Linie kh, wenn die Abschnitte vorwärts geschehen. Ueberhaupt darf man nur beyderseits gleiche aliquote Theile vom Scheitelpunkte c aus abschneiden, so erhält man auch einen solchen aliquoten Theil der zu bestimmenden Weite: das ist, nimmt man Drittheile, so ergiebt sich auch der dritte Theil der gesuchten Distanz u. s. f.

Zwote Auflösung. Man suche sich zu Stellung des Meßtisches einen solchen Standpunkt, wo man sowohl zu beyden Oertern sehen, als auch in gerader Linie vom Tische weg, dahin messen kann, visiere durch die Dioptern nach einem der beyden Oerter, und ziehe mit einem feinen Bleystift eine Linie von unbestimmter Länge an dem Lineal der Dioptern auf das Meßtischchen. Das nämliche bewerkstellige man auch beym zweyten Orte, doch so, daß die beyden Linien miteinander einen Winkel bilden, lasse die entsprechenden Linien des Feldes wirklich messen, und schneide sie aus dem Scheitelpunkt

im

im verjüngten Maase, z. B. 4000 mal kleiner ab, so wirft die Entfernung der beyden Abschnittspunkte nach verjüngtem Maasstabe das nämliche aus, was die zu suchende Weite in wahren Schuhen oder Ruthen hält. Der Beweis hat viel Aehnlichkeit mit dem vorigen; denn es sey Fig. 150 $ac = \frac{cx}{4000}$ und $cb = \frac{cy}{4000}$, so ist der

Satz

$$ab = \frac{xy}{4000}$$

Beweis.

$$cx : cy = cx : cy = \frac{cx}{4000} : \frac{cy}{4000}$$

In der Fig. $cx : cy = ac : cb$
Folglich ist wieder ab parallel mit xy
Daher auch $ac : cx = ab : xy$
subst. $\frac{cx}{4000} : cx = ab : xy$

$$:cx \quad \frac{1}{4000} : 1 = ab : xy$$

und $$ab = \frac{xy}{4000}$$

§ 15. **Anmerk.** Daß statt 4000 allgemein m oder ein anderer Buchstab gesetzt werden könne, braucht eben nicht zu erinnern. Mir schien die Sache so für Anfänger sinnlicher zu werden.

Dritte Auflösung. Man ist hier nichts benöthigt, als einer Winkelscheibe, um an einem Standpunkte, der die obigen Eigenschaften haben muß, den Winkel in Graden, und wenn es seyn kann, auch

in

in Minuten u. s. f. zu bestimmen, welchen die beyden Linien, die ebenfalls wie vorher mit der Kette gemessen werden müssen, mit einander machen. Man hat dann den Fall in der Trigonometrie, wo zwo Seiten und der dazwischen liegende Winkel bekannt sind, woraus sich nach dortiger Anweisung §. 57 leicht das übrige durch Hilfe der Logarithmen finden läßt.

§. 16. **Zusatz.** Sind die zwey Oerter, deren Distanz bestimmt werden soll, von der Beschaffenheit, daß man von einem zum andern sehen kann, so mag man auch von einem Orte an eine Standlinie annehmen, und aus den Endpunkten nach den Oertern visieren, um die beyden Winkel zu messen, welche an der Standlinie anliegen. Hat man nun die Länge der Standlinie durch die Kette bestimmt, so tritt der trigonometrische Fall ein, wo zwo Seiten und alle Winkel bekannt sind; weil der dritte Winkel das arithmetische Komplement zu 180° ist.

§. 17. **Aufgabe. Eine Weite von der zwoten Art durch die nämliche dreyfache Methode zu messen.**

Erste Auflösung, ohne Meßtisch. Man suche, Fig. 151 in einiger Entfernung von dem zugänglichen Orte, einen Punkt, der mit den beyden Oertern in gerader Linie steht, z. B. a wo nämlich ein Ort das andere deckt. Von diesem Punkte messe man durch die Kette eine Linie von beliebiger Länge rechts oder links hinweg, wie es die Umstände der Gegend erlauben; hier von a nach c, und trage diese Linie im gleichem Maase und Richtung noch weiter fort, d. i. mache a c = c b. Ferner messe man

vom

vom zugänglichen Objekte gleichfalls bis an den Halbierungspunkt der vorigen Linie, und trage eben so auch diese Distanz in ihrer Richtung fort, wie hier von y nach c, wo nachher c y = c d geworden. Es müssen aber auf dem Felde alle diese Punkte theils durch Absteckstäbe oder theils auch durch Meßfahnen, welche man perpendikular in die Erde senkt, sichtbar gemacht werden. Endlich suche man den Punkt der sowohl mit den beyden Endpunkten der verdoppelten Linien, als mit dem Halbierungspunkt und dem unzugänglichen Objekte in gerader Linie steht. Dieß kann auf dem Felde wieder daraus abgenommen werden, wenn die Absteckstäbe in jeder Richtung dem Auge sich decken. In unsrer Figur stellt diesen Punkt das f vor; weil er sowohl mit b und d, als mit c und x in einer Linie liegt. Die Linie nun vom Endpunkte der lezten Doppellinie bis dahin, nämlich d f ist die Entfernung des zugänglichen Objekts vom unzugänglichen.

Satz

d f = x y

Beweis.

a c = c b
y c = c d } Aus der Bedingung
o = m als Vertikalw.
Also △ a c y ≅ △ c b d: Folglich
s = r und als Komplement zu 180°
n = z Da nun ohnehin
y c = c d und
φ = λ so muß auch
△ c x y = △ c d f seyn. Und eben darum
auch x y = d f.

§. 18.

§. 18. **Anmerk.** Geht der Vortheil an, daß sich Fig. 152 irgend bey einem der beyden Objekte, wie bey y ein rechter Winkel schlagen, und der Perpendikel y c fortmessen läßt, so errichte man unterhalb an einem gelegnen Orte in b einen andern Perpendikel auf die Linie y c von beliebiger Länge, senke im Endpunkt a einen Absteckstab, und gehe so lange gegen c fort bis ein dritter Absteckstab sowohl die Objekte b und y, als a und x deckt. Weil nun c b, a b und c y gemessen werden kann, und a b mit x y wegen rechten Winkeln parallel läuft, so ist nach §. 143 Nro IV Geom.

	c b	: a b	=	c y : x y
Gesetzt es wäre	c b		=	20
	a b		=	15
	c y		=	44
so ist	20	: 15	=	44 : x y
oder abgek.	4	: 3	=	44 : x y
nochmal	1	: 3	=	11 : x y
und		x y	=	33

Zweyte Auflösung, (mit dem Meßtische). Man messe sich vom zugänglichem Orte aus eine Standlinie, stelle auf dem Endpunkte a Fig. 153 das Meßtischchen, visiere nach beyden Orten und schneide die gemeßne Standlinie im verjüngten Maase a c von der Richtungslinie a y ab. Uebertrage nun, sobald eine Meßfahne eingesenkt worden, den Tisch nach dem zugänglichen Orte y und drehe ihn so lange, bis man durch die Dioptern, deren Lineal an der abgeschnittnen verjüngten Linie anliegt, die Meßfahne erblickt, lasse den Tisch unverrückt stehen, und visiere aus dem Abschnittspunkte nach dem unzugänglichen Objekte, so wird die Schlußlinie des Dreyecks auf dem Tische die Entfernung der beyden Oerter im verjüngten Maase sein.

Beweis. Denn das Dreyeck auf dem Tischchen und das auf dem Felde, welches die Visierlinien bestimmen, sind wegen Gleichheit der Winkel einander ähnlich; also stehen die gleichnamigen Seiten im Verhältniße. Setzen wir nun, es sey eine von den

Seiten

Seiten des verjüngten Dreyecks 4000 mal kleiner, als die gleichnamige des Felddreyecks, so muß es auch die andere seyn; da aber die Schlußseite mit der Entfernung der beyden Oerter gleichnamig ist, so muß sie auch 4000 mal kleiner, als dieselbe seyn; folglich wirft sie die Entfernung der Oerter in verjüngtem Maase aus, das was zu erweisen war.

Dritte Auflösung, (trigonometrisch) Es lassen sich durch die Winkelscheibe füglich an den Endpunkten der nach voriger geometrischer Art willkührlich angenommenen Standlinie die Winkel messen, folglich ist auch der dritte Winkel bekannt. Man kann nun gar leicht folgern: Die Seiten verhalten sich wie die Sinusse der opponierten Winkel. Nehmen wir an, es sey in der vorigen Figur

$$a\,y = 62'$$
$$a = 51^\circ 12'$$
$$y = 80^\circ,29'$$
so ist $$x = 180^\circ - 51^\circ 12' - 80^\circ 29'$$
$$= 180 - 131^\circ 41' = 48^\circ 19'$$

Da nun der Winkel x der gemessenen Seite a y; und der Winkel a der unbekannten Entfernung x y übersteht oder opponiert ist, so hat die Proportion statt.

$$\sin x : a\,y = \sin a : x\,y$$

oder $$\sin 48^\circ 19' : 62' = \sin 51^\circ,29 : x\,y$$

Logarithmisch berechnet

Log. 62	= 1,7923917
Log. sin $51^\circ 29'$	= 9,8905026
	11,6828943
Log. sin $48^\circ 19'$	= 9,8710735
	1,8118208 Log x y

denn die Zahl 66' am nächsten entspricht, welche die Entfernung der beyden Oerter ausdrückt.

§. 19.

§. 19. Aufgabe. Eine Weite von der dritten Gattung auf dreyerley Art zu messen.

§. 20. **Anmerk.** Da die Ausmessung dieses Falles ohne Meßtisch gar zu vielen Schwierigkeiten und Fehlern auch bey der grösten Akuratesse ausgesetzt ist, so wollen wir lieber davon schweigen, und statt dessen nützlichere Sätze anführen.

Zwote Auflösung. Man wähle Fig. 154 eine Standlinie a b, von deren Endpunkte sich zu beyden Orten visieren läßt. Stelle das Tischchen in a, visiere nach x, b und y, zeige die Richtungen durch unbestimmte Linien aus dem nämlichen Punkte an, lasse a b messen, und schneide sie im verjüngten Maase aus a ab. Man übersetze den Meßtisch nach b, und drehe ihn so, daß wenn nach a visiert wird, das Diopterlineal dicht an der abgeschnittenen Richtungslinie fortläuft. Man visiere mehrmal aus b nach x und y, ziehe diese Linien wirklich so lange, bis gegen x und y Durchschnitte erfolgen. Die Entfernung dieser Durchschnittspunkte ist die verjüngte Entfernung der Objekte auf dem Felde.

Beweis.

Da eine Seite und die darauf liegenden beyden Winkel ein Dreyeck völlig bestimmen, so sind eben darum auch die △ △ a b x und a b y bestimmt, welche jenen auf dem Felde wegen Gleichheit der Winkel ähnlich sind. Da ferner die Grundlinie a b worauf sie stehen, die nämliche ist, und eben so wenig als die darauf liegenden Winkel geändert werden kann, so bleibt auch die Lage ihrer Spitze unveränderlich und steht, weil alles ähnlich ist, mit der Entfernung der beyden unzugänglichen Seiten im Verhältniße; weil sie gerade das im Kleinen vorstellt, was die Felddreyecke im Großen sind.

Dritte

Dritte Auflösung. (trigonometrisch) Es wird hier mehrmals eine bequeme Standlinie erfodert, so wie in der vorigen geometrischen Auflösung. Man zeichne sich irgend auf einem Papiere beyläufig die Stellung der obigen Dreyecke, die die Visierlinien des Winkelinstruments bestimmen, schreibe die gemeßnen Winkel m, n, s und o sonderheitlich auf, so gilt erstens, weil die Winkel bey x und y als Komplemente ebenfalls bekannt sind, in dem Δ a x b die Proportion

$$\sin x : ab = \sin s : ax$$

Ist nun die Linie a x gefunden, so ist zweytens in dem Δ a y b

$$\sin y : ab = \sin (o+s) : ay$$

Wenn auch dieses a y bestimmt worden, so hat man ferner in dem Δ x y a den Fall, wo zwo Seiten nämlich a x und a y nebst den dazwischenliegenden Winkel m bekannt ist; daher drittens nach §. 57 Trig.

$$(ay + ax) : (ay - ax) = \text{Tang}\left(\frac{(x+v)+r}{2}\right) \text{Tang}\left(\frac{(x+v)-r}{2}\right)$$

Nach gehöriger Berechnung der Winkel v und r ist es endlich gar leicht entweder aus dem Δ a x y oder Δ b x y die Seite x y zu folgern; denn man setze im ersten Falle z. B. die Proportion an

$$\sin r : ax = \sin m : xy$$

§. 21. Anmerk. So mühsam und weitläufig auch diese trigonometrische Meßmethode zu seyn scheint; so sehr lohnt es doch der Mühe, selbe der geometrischen Art, besonders bey beträchlichen Weiten, wegen ihrer ungleich größern Genauigkeit vorzuziehen; vorausgesetzt, daß man mit Winkelmessern versehen sey, welche auch neben den Graden die Minuten, oder gar noch die Sekunden angeben. Daß dazu auch Tafeln gehören, wo dergleichen Sinusse und Tangenten mit Sekunden

den nachgeschlagen werden können, versteht sich von selbst. Es ist dazu Johann Carl Schulze neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer u. a. Tafeln, zween Bände, Berlin 1778 wegen ganz besonderer Brauchbarkeit zu empfehlen; indem selbe durchgehends nach der so kostbaren Sherwinschen Ausgabe der Mathematical Tables veranstaltet worden.

Von Höhenmessungen.

§. 22. **Eintheilung.** Höhen können entweder von Natur aus unzugänglich seyn, wie die Perpendikel der Berge auf die runde Oberfläche der Erde; oder zugänglich, wie Bäume, Thürme, u. d. gl.; oder sie verlangen wegen andern Umständen aus der Ferne gemessen zu werden, wie z. B. wegen unebnen Zugängen, allzugroßen Entfernungen u. s. w.

§. 23. **Aufgabe.** Eine zugängliche Höhe, z. B. einen Baum, 1) Ohne Meßinstrument, 2) mit Meßinstrument (geometrisch) 3) trigonometrisch zu bestimmen.

Erste Auflösung. Dieß kann so wohl durch Hilfe zweener Stäbe, als durch den Schatten geschehen.

I Durch Hilfe zweener Stäbe. Man nehme Fig. 155 zween Stäbe, deren einer a b 5 Schuh, und der andere d f (wir wollen setzen) 8 Schuh hoch ist, senke diesen letztern in einiger Entfernung vom Baume perpendikulär in die Erde, so daß er außerhalb noch immer 8 Schuh mißt (folglich muß seine Länge um so viel größer seyn, als nöthig ist, ihn in der Erde befestigen zu können) dann gehe man mit dem erstern Stabe a b so weit zurücke, bis das auf dem Endpunkte a aufgesetzte Aug den Endpunkt d des andern Stabes und den Wipfel des Baumes

in

in einer Linie erblickt — es versteht sich, daß auch der Stab a b perpendikulär gehalten werden müsse, — so entsteht, wenn die Entfernung der Stäbe von einander, und die Entfernung des kürzern Stabes vom Baume selbst gemessen worden, weil d c mit h y parallel läuft, nach §. 143 Nro IV Geom. folgende Proportion a c : d c = a h : h y. Da aber wegen Parallelismus a c = f b, und a h = b x; ferner d c = d f — c f, und weil mehrmal c f = a b folglich d c = d f — a b und endlich a h = b x ist so kann substituiert werden. Also f b : (d f = a b) = b x : h y. In Worten ausgedrückt heißt demnach die Proportion so: Die Distanz der Stäbe von einander verhält sich zu ihrer Längendifferenz: wie der Abstand des kleinern Stabs vom Baume, zur Höhe des Baumes selbst, wozu aber noch am Ende 5 Schuh addiert werden müssen; weil die ganze Höhe des Baums = h y + h x und h x = a b ist. Setzen wir der größere Stab halte 8 Schuh, sie stehen 10 Schuh von einander, und der 5 Fuß hohe Stab sey 150 Schuh vom Baum entfernt; so ist

10 : 3 = 150 : z
10 z = 450
z = 45, und 45 + 5 = 50 der Höhe des Baumes.

§. 24. **Anmerk.** Auf diese Methode gründet sich die Einrichtung des sogenannten Dendrometers (Baummesser) welchen Hr. Prof Jung in seinem Lehrbuche, und nach ihm Hr. Prof. Grünberger in dem Lehrbuche für churpfalzbaierische Förster §. 229 I Th. beschrieben hat.

II Durch den Schatten. Man senke beym Sonnenschein einen Stab von gewisser Länge perpendikulär in die Erde, und messe sowohl den Schatten des Stabes, als den des Baumes oder Thurmes

auf

auf einer Horizontalebne zur nämlichen Zeit, so kann man folgern: Wie sich der Schatten des Stabes zum Stabe selbst verhält; so verhält sich ebenfalls auch der Schatten des Baums zum Baume selbst. Denn der Schatten bildet zwischen dem Baum oder Thurme, zwischen der Horizontallinie und zwischen der Lichtgränze ein rechtwinklichtes Dreyeck. Weil nun alle Perpendikulärobjekte, wegen der allzugroßen Entfernung des leuchtenden Körpers zur nämlichen Zeit einen gleichen Winkel mit dem letzten aufliegenden Sonnenstrahl machen, so sind sich diese Schattendreyecke ähnlich; folglich stehen die gleichnamigen Seiten im Verhältniße, welches in unsern Falle die Horizontallinien, in so weit sie der Schatten begränzt, und die Höhenobjekte selbst sind. Um dießmal nicht ohne Beyspiel zu bleiben, so sey der Stab außerhalb der Erde 9 Schuh hoch, und werfe einen Schatten von $7\frac{1}{2}$ Schuhe; zur nämlichen Zeit messe der Schatten des Thurms $83\frac{1}{4}$ Schuh, so ist demnach

$$7\tfrac{1}{2} : 9 = 83\tfrac{1}{4} : x$$
$$\frac{15}{2} : 9 = \frac{333}{4} : x$$
$$\frac{15x}{2} = \frac{2997}{4}$$
$$60x = 5994$$
$$x = 99\tfrac{9}{10} \text{ Schuh}$$

§. 25. Anmerk. Es giebt noch zwo Arten, Höhen ohne Meßinstrument zu bestimmen. Z. B. bey Thürmen oder auch beträchtlichen Vertiefungen, als Brunnen, unterirdischen Höhlen u. d. gl. durch den freyen Fall eines schweren Körpers, wie etwa eines Steins oder einer Bleykugel. Läßt sich aber bey Höhen, die man besteigen kann, kein Perpendikulärfall anbringen, so thut das Barometer treffliche Dienste, ihre Größe so ziemlich genau ausfindig zu machen. Wir wollen die praktische Verfahrungsart beyder Methoden am gehörigen Orte hier einrücken.

Erstens. Durch den freyen Körperfall.

Es ist aus der Physik bekannt, daß in unsrer Atmosphäre die Körper der schwerern Art, während des freyen Falles, in der ersten Sekunde 15,6 rheinländische Schuhe, in der zwoten 45,6, in der dritten 75,6 u. s. f. durchlaufen: daß überhaupt, wenn S den Raum (Spatium) T die Zeit (Tempus) und g die Zahl 15,6 bedeutet, gemäß der Progreßionslehre $S = g T^2$ sey. Ist daher die Zeit nach Sekundenuhren, oder noch besser, nach Tertienuhren, dergleichen man zu Göttingen auf dem Observatorium hat, während des Falls beobachtet worden, so kann der Raum (das ist, z. B. die Tiefe des Brunnens) leicht nach der Formel berechnet werden. — Nehmen wir an, einen Stein, der in eine unterirdische Vertiefung geworfen worden, habe man erst nach $4\frac{1}{4}$ Sekunden fallen gehört; wie groß ist diese Tiefe?

Wenn der Fall des Steins in dem nämlichen Augenblicke gehört würde, in welchem er wirklich geschehen ist, so hätte man weiter nichts zu thun, als nach obigem allgemeinen Ausdrucke das Quadrat der Zeit $4\frac{1}{4}$ mit 15,6 zu multiplicieren. Allein es ist mehrmal aus der Physik bekannt, daß der Schall in jeder Sekunde 1040 Pariserfüsse oder 1076 rheinländische Schuhe durchläuft; folglich ist in der Zeit $4\frac{1}{4}$ Sekunden auch jene mit begriffen, die der Schall des Steines brauchte, bis er durch die Tiefe herauf kam. Nenne man deßwegen die unbekannte Schuhenanzahl der Tiefe $= x$, und bestimme allgemein die Zeit, welche der Schall gebraucht, durch folgende Proportion

1076 Sch. : 1 Sek. = x : $\frac{x}{1076}$,

und ziehe den gefundnen Werth von $4\frac{1}{4}$ Sekunden ab, so bleibt die wahre Zeit für den Fall. Folglich $T = 4\frac{1}{4} - \frac{x}{1076}$ Dieß nun in der Gleichung $S = g\,T^2$ substituiert, giebt

$$x = 15{,}6 \times \left(4\tfrac{1}{4} - \frac{x}{1076}\right)^2$$

Um die Sache noch allgemeiner zu machen, wollen wir einsweilen für 1076 = a, 15,6 = b und $4\frac{1}{4} = c$ setzen, so entsteht die Gleichung

$$x = b\left(c - \frac{x}{a}\right)^2$$ Nun fortkalkuliert

$$x = b\left(c^2 - \frac{2cx}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$x = bc^2 - \frac{2bcx}{a} + \frac{bx^2}{a^2}$$

$a^2 \times \quad -bc^2 = \frac{bx^2}{a^2} - \frac{2bcx}{a} - x$

$$-a^2bc^2 = bx^2 - 2abcx - a^2x$$

b: $$-a^2c^2 = x^2 - 2acx - \frac{a^2x}{b}$$

$$-a^2c^2 = x^2 - \left(2ac + \frac{a^2}{b}\right)x$$; kompliert

$$a^2c^2 + \frac{a^3c}{b} + \frac{a^4}{4b^2} = \left(ac + \frac{a^2}{2b}\right)^2$$

$$\frac{a^3c}{b} + \frac{a^4}{4b^2} = x^2 - \left(2ac + \frac{a^2}{b}\right)x + \left(ac + \frac{a^2}{2b}\right)^2$$

$$\frac{4a^3bc + a^4}{4b^2} = x^2 - (2ac.. \text{ \&c.})$$

a^2

$$\frac{a^2}{4b^2}\left(4abc+a^2\right)=x^2-\left(2ac+\frac{a^2}{b}\right)$$

$$x+\left(\frac{ac+a^2}{2b}\right)^2$$

$$\pm\frac{a}{2b}\sqrt{4abc+a^2}=x-\left(\frac{ac+a^2}{2b}\right)$$

$$ac+\frac{a^2}{2b}\pm\frac{a}{2b}\sqrt{(4bc+a)a}=x$$

Für den besondern Fall wieder substituiert, so erhält man

$$1076\times4\tfrac{1}{4}+\frac{(1076)^2}{2\times15{,}6}\pm\frac{1076}{2\times15{,}6}\sqrt{(4\times15{,}6\times4\tfrac{1}{4}+1076)\times1076}=x$$

$$\frac{1076\times17}{4}+\frac{1157776}{31{,}2}\pm\frac{1076}{31{,}2}\sqrt{(265{,}2+1076)\times1076}=x$$

$$4573+37108{,}2\pm34{,}487\sqrt{1341{,}2\times1076}=x$$

$$41681{,}2\pm34{,}487\sqrt{1443131{,}2}=x$$

$$41681{,}2\pm34{,}487\times1201{,}3=x$$

$$41681{,}2\pm41429{,}4=x$$

$$251{,}8=x \text{ die wahre Tiefe.}$$

Hätte man hier auf den Weg des Schalls keine Rücksicht genommen, so wäre die Rechnung nach der Formel $S=gT^2$ folgende gewesen

$$x=15{,}6\times(4\tfrac{1}{4})^2$$

$$x=\frac{15{,}6\times289}{16}=\frac{4508{,}4}{16}$$

$x=281$. Und diesemnach würde die Tiefe gegen 30 Schuhe zu groß angesezt worden seyn,

Zweytens. Durch Hilfe des Barometers.

Man hat aus wiederholten Versuchen wahrgenommen, daß, je höher man mit dem Barometer in die obere Luftgegend hinauf steigt, je mehr das Queckſilber in ſelbem falle. Ja es ist sogar ein erwiesenes Gesetz: *) daß sich, bey der nämlichen Lufttemperatur, die Höhen über der Horizontalfläche gegen einander verhalten, wie die Logarithmen der Quotusse, welche entstehen, wenn man den Barometerstand der Horizontalfläche durch die Barometerstände dieser Höhen dividiert. Wenn demnach die Höhen = A und a, der Barometerstand auf der Horizontalfläche = b, die andern hingegen = m und M gesetzt werden, so sieht die Proportion so aus

$$a : A = \text{Log}\,\frac{b}{m} : \text{Log}\,\frac{b}{M}$$

Nun lege man ferner folgende Erfahrung zum Grunde: Wenn in einer Station, die man für die Horizontalfläche annehmen kann, der Barometerstand 29 Pariserzoll oder $29 \times 12 = 348$ Linien beträgt, welcher demnach durch b ausgedrückt werden muß, und man sich mit dem Barometer um 12,497 Toisen erhöht, welche Höhe = a gesetzt wird, so sinket das Queckſilber um eine ganze Linie, das heißt, der Barometerstand ist hier 347 Linien = m Diese Größen nun in obiger Proportion substituiert, so wird sie bald zur näherer Brauchbarkeit geschickt werden.

12,

*) Der strenge Beweis dieses Satzes gehört in die Physik. Er kann indeß mit seiner Vollständigkeit bey Tobias Maier in dessen gründlichem Unterrichte zur praktischen Geometrie nachgesehen werden.

$$12{,}497 : A = \text{Log}\,\tfrac{348}{347} : \text{Log}\,\tfrac{348}{M}$$

Da aber $\text{Log}\,\frac{348}{347} = \text{Log}\,348 - \text{Log}\,347 = 0{,}0012497$ ist, und eben so $\text{Log}\,\frac{348}{M} = \text{Log}\,348 - \text{Log}\,M$ so giebt dieß

$$12{,}497 : A = 0{,}0012497 : (\text{Log}\,348 - \text{Log}\,M)$$

$$A = \frac{12{,}497 \times (\text{Log}\,348 - \text{Log}\,M)}{0{,}0012497}$$

$$A = 10000\,(\text{Log}\,348 - \text{Log}\,M)$$

Es läßt sich also durch diese Formel immer berechnen, wie weit zwo Stationen von der angenommenen Horizontalfläche entfernt sind. Zieht man diese Entfernungen von einander ab, so hat man offenbar die Höhe, um welche die beyden Stationen von einander unterschieden sind. Es sey daher

die höhere Station $= x$
dessen Barometerstand $= c$
die kleinere Höhe $= y$
dessen Barometerstand $= d$

so erhält man folgende Rechnung

$$x = 10000\,(\text{Log}\,348 - \text{Log}\,c)$$
$$y = 10000\,(\text{Log}\,348 - \text{Log}\,d)$$

$$x - y = 10000\,(\text{Log}\,348 - \text{Log}\,c - \text{Log}\,348 + \text{Log}\,d)$$
$$x - y = 10000\,(\text{Log}\,d - \text{Log}\,c);$$

und die allgemeine Regel ist bereits auf den simpelsten Ausdruck gebracht. Sie heißt nun so: Man multipliciere die Logarithmendifferenz der Barometerstände an zweyen Orten mit 10000, so zeigt das Produkt die Toisen an, um wie viel ein Ort höher, als das andere liegt. Zu einem Beyspiel dient folgende Aufgabe.

Der Barometerstand auf der mittleren Meereshöhe soll nach meiner Erkundigung 28″6‴ = 342‴; hingegen in Quito 20″ = 240‴ seyn; um wie viel Toisen läge Quito höher als die mittlere Meereshöhe? vorausgesetzt, daß sonst nichts weiter auf das Steigen oder Fallen des Barometers Einfluß gehabt, als die natürliche Abnahme der Luftschwere in der Entfernung von der Horizontalfläche.

Log 342 = 2,5340261
Log 240 = 2,3802112

Differenz = 0,1538149

Diese Differenz mit 10000 multipliciert

0,1538149
10000

1538,1490000

Folglich läge Quito 1538,149 Toisen höher als die mittlere Meereshöhe.

§. 26. Anmerk. Indeß mag man sich leicht einbilden, daß es manche Umstände geben könne, die eine solche Messung unrichtig machen, z. B. die plötzliche Veränderung des Drucks der Luft in der Atmosphäre, während an beyden Orten die Barometerstände observiert worden; die Wärmegrade, welche das Queckſilber mehr oder weniger ausdehnen u. d. gl. Doch hat man wieder Mittel ausfindig gemacht, wie man auch diese Fehler korrigieren müsse. Herr Hofrath Kästner spricht in seiner Abhandlung, Höhen durch's Barometer zu bestimmen, weitläuftiger darüber. Ferner sind als hieher gehörige Schriften zu empfehlen: De Luc sur les modifications de l'Atmosphaere, Michaeli du Creſt's kleine Schriften, vom Therm. und Barom. aus dem Französischen von J. C. Thenn, Augsb. 1770 u. d. gl.

Zwote Auflösung; zugängliche Höhen nämlich durch Hilfe eines Instruments zu bestimmen.

Man wähle sich in einer Entfernung einen Standpunkt, bringe das Blatt des Meßtischchens

über

über dem Stativ in eine vertikale Stellung, so, daß ein Rand desselben mit dem Horizonte parallel zu stehen kömmt, welches sich mittels einer Bleywage leicht verrichten läßt, visiere alsdann nach dem Endpunkte des Höhenobjekts, ziehe an der Alhidadenregel oder Diopternlineal eine Linie auf das Tischchen, durchschneide diese Linie wo immer durch eine andere, die mit obbemeldtem Rande parallel läuft, lasse ferner die Entfernung des Tisches von dem Höhenobjekte wirklich messen, und trage sie verjüngt aus dem Durchschnittspunkte auf die Parallelinie, errichte auf dem Endpunkt dieser verjüngten Linie einen Perpendikel, der den Winkel zu einem rechtwinklichten Dreyeck schließt, so ist dieser Perpendikel die Höhe des Objekts im verjüngten Maase, wenn die Höhe des Stativs dazu addiert wird, weil Fig. 156 selbe = a h ist. Der Beweis ist mehrmal, wie §. 17 zweyte Auflös.

§. 27. Anmerk. Es kann der Winkel auch mit einem Astrolabium oder Quartanten gemessen, und dann auf einem Papier durch Hilfe eines geradlinnichten Transportärs über der Entfernung aufgetragen, und das Dreyeck durch einen Perpendikel geschlossen werden, so ist dieser gleichfalls wie oben die verlangte Höhe, weniger dem Stativ. Es wird aber bey diesen Auflösungen durchgehends voraus gesetzt, daß die Ebne mit dem Höhenobjekt einen rechten Winkel formieren.

Dritte Auflösung. (trigonometrisch) Wenn der Winkel sammt der Entfernung gemessen worden, so gilt Fig. 156, weil $x + c = 90$ also $x = 90 - c$, die Proportion

$$\text{cos } c : a\,c = \text{sin } c : a\,x$$

Es sey z. B. $c = 38° 19'$

und $a\,c = 112'$

Folglich $\text{cos } 38° 19' : 112 = \text{sin } 38° 19' : a\,x$

Loga-

Logarithmisch berechnet

Log sin 38°19 = 9,7923968
Log 112 = 2,0492180

11,8416148
Log cos 38°19 = 9,8946461

1,9469687 = Log 88′5″

und wenn das Stativ $4\frac{1}{2}$ Schuh hoch ist, so beträgt die ganze Höhe 88,5 + 4,5 = 93′

§. 28. **Aufgabe.** Eine unzugängliche Höhe 1) geometrisch 2) trigonometrisch zu erforschen.

Erste Auflösung. (geometrisch) Man wähle sich auf einer Ebne eine Standlinie, von deren Endpunkten man das Höheobjekt erblicken kann, messe die beyden Winkel, die die Visierlinien mit der Standlinie machen, und ihre Entfernung von einander, bringe sie wie oben zu Papier, und ziehe die Schenkel so lange fort, bis sie ein überhängendes Dreyeck schließen. Der Perpendikel davon ist wieder unter vorigen Umständen die verlangte Höhe; welches sich auch eben sowohl auf dem vertikal gestellten Meßtische bewerkstelligen läßt, wie Fig. 157. Der Beweis hievon läuft immer auf das nämliche hinaus, was weiter oben §. 17 zwote Aufl. erwiesen worden.

Zwote Auflösung. (trigonometrisch) Man mache sich auf irgend ein Papier Fig. 158 ein kleines Brouillon (Entwurf), und messe alles wie vorhin, so ergiebt sich folgende Rechnung

Weil o und m gemessen worden, so muß auch s bekannt seyn. Es ist nämlich s = 180 — o — m. Man hat demnach die erste Proportion.

l sin s : b c = sin m : b x

Ist

Ist nun b x gefunden, so folgere man in dem rechtwinklichten Nebendreyeck b x y, wo sich n als anliegender Winkel von o bestimmen läßt:

II sin tot. : b x = sin n : x y

Nehmen wir wieder an, es sey

b c = 48′
m = 33°11′
o = 124°30′

folgl. s = 180 — 124°,30′ — 33°,11 = 180 — 157°41′ = 22°,19′

und n = 180 — 124°,30′ = 55°30′

so heißt nach der Substitution die erste Proportion

sin 22°19′ : 48 = sin 33°11′ : b x

Und in Logarithmen

Log 33°11′ = 9,73824 12
Log 48 = 1,6812412

11,4194824
Log 22°19′ 9,5794695

1,8400129 Log = b x

Die zweyte Proportion

sin 90° : b x = sin 55°30′ : x y

Nach den logarithmischen Tafeln behandelt

Log b x = 1,8400129 wie eben gefun-
Log sin 55°30′ = 9,9159937 den worden.

11,7560066
Log sin tot = 10,0000000

1,7560066 = Log 57′

Folglich ist die gesuchte Höhe, wenn auch das Stativ in Anschlag gebracht wird

57 + 4½ = 61½ Schuh

§. 29.

§. 29. Zusatz. Macht die Ebne mit dem Höhenobjekt einen schiefen Winkel, z. B. Thürme auf Bergen, so muß sowohl der Berg selbst, als auch der Thurm sammt dem Berge besonders gemessen und die Resultate von einander abgezogen werden, welches dann die wahre Höhe des Thurmes giebt.

Von Aufnehmung der Gegenden.

§. 30. **Eintheilung.** Gegenden oder Reviere lassen sich sowohl ohne Meßtisch, als mit dem Meßtische (geometrisch) als auch trigonometrisch aufnehmen, wie wohl nicht mit gleicher Akkuratesse und Mühwaltung.

§. 31. **Aufgabe.** Ein Feld, Wiese, Garten oder anders kleine Bezirk ohne Meßtisch aufzunehmen.

Auflösung. Formiert eine aufzunehmende Fläche genau ein Dreyeck oder Parallelogram, so ist freylich nichts leichters, als eine solche Figur nach verjüngtem Maßstabe in Grund zu legen: hat sie aber die Form eines Trapezes (auch dieß ist nicht schwer) oder eines irregulären Vielecks, dann fodert das Geschäft mehr Weitläuftigkeit. — Ferner entsteht noch die Frage, ob man diese Fläche durchgehen kann oder nicht. Im ersten Fall werden alle Seiten sammt den Diagonalen gemessen, und diese Dreyecke auf dem Papier gerade so im verjüngten Maase durch Hilfe des Zirkels auf einander gesetzt, wie man sich selbe auf dem Felde im Großen mittels dieser Diagonale vorstellen muß. Läßt sich die Revier nicht durchgehen, wie Pfützen, Seen, auch dichte Wälder u. d. gl. so müssen die Seiten von außen gemessen, und die Winkel auf folgende Art

bestimmt

bestimmt werden. Man verlängere die Schenkel der Winkel rückwärts nach Verstattung der Gegend um 10, 20 oder 30 Schuhe, und messe die Entfernung der Endpunkte, so werden diese kleinen Dreyecke Fig. 159 abc, dfg, wenn man sie auf dem Papiere sammt der dazu gehörigen Seite verjüngt aufträgt die Vertikalwinkel vollkommen bestimmen; und wenn dieß mit allen Winkeln geschieht, so muß sich das Polygon bey der letzten Seite ka von selbst schliessen.

Giebt es in der Figur gar zu viele Ecke und Krümmungen, so ist es besser, man beschreibt selbst ein willkührliches Viereck oder Polygon darum, wie Fig. 160, und mißt auf die vornehmsten Beugungen Perpendikel hinein, als ab, cd u. s. f. Gut wird es seyn, davon ein Brouillon in Handen zu haben, damit man sich zu Hause, wenn all dieß im verjüngten Maase zu Papier nachgemacht wird, die Lage noch beyläufig vorstellen kann.

§. 32. **Aufgabe.** Eine Revier durch Hilfe des Meßtisches aufzunehmen.

Auflösung. Wenn man in sie hinein kommen, und darinn ein oder mehrere Standpunkte ausfindig machen kann, von wo aus sich die ganze Gegend übersehen läßt, vorzüglich aber die Winkelpunkte, die durch Meßfahnen und Absteckstäbe müssen sichtbar gemacht werden, so stelle man (wir wollen dießmal nur einen Standpunkt annehmen) den Meßtisch dahin, ziehe allererstens mittels der Bousolle eine Mittagslinie, damit der Plan auch die Lage der Revier gegen die vier Weltgegenden anzeigt, und visiere nach allen Winkelpunkten, ziehe unbestimmte Linien dahin; lasse alle diese Visierlinien messen und

schneide

schneide sie versjüngt aus ihrem Mittelpunkt ab. Werden nun diese Abschnittspunkte durch Linien verbunden, so ist der Plan fertig.

Beweis.

Denn die Dreyecke Fig. 161 o a b und o A B, o b e und o B C sind alle ähnlich, wegen den gemeinschaftlichen Winkeln bey o und den z. B. 4000 mal kleineren Seiten, folglich ist auch wegen Aehnlichkeit der Theile das Ganze selbst einander ähnlich.

§. 33. **Zusatz.** Läßt sich die aufzunehmende Gegend nur umgehen, so stelle man den Meßtisch auf einen Winkelpunkt derselben, visiere nach den zween nächsten Winkeln, und trage die gemessenen zwo Seiten auf. Mit diesen verfüge man sich zu einem der nächsten Winkel, und stelle den Meßtisch so, daß, wenn das Diopternlineal an der gehörigen versjüngten Seite liegt, sich nach jenen Winkel visieren läßt, der gerade vorher aufgetragen worden; drehe dann das Diopternlineal um, und visiere nach dem nächstfolgenden Winkel, versjünge die zwischenliegende Seite, und fahre so fort, bis man ganz herumgekommen, so wird sich das Polygon bey der letzten Seite, wenn recht gemessen worden, vollkommen schließen.

§. 34. **Aufgabe.** Eine Gegend trigonometrisch aufzunehmen.

Auflösung. Man gehe zuerst durch oder um das Revier, zeichne sich davon ein Brouillon, zerfälle selbes auf die geschickteste und thunlichste Art in Dreyecke, messe die benöthigten Winkel und Seiten, und bringe das trigonometrisch Berechnete allemal

sogleich

sogleich wieder zu Papier, so wird man am Ende erhalten, was man wollte.

§. 34. **Anmerk.** Weitläuftigere Anweisungen zur praktischen Geometrie verstattet der Raum dieses Werkchens nicht. Wer Lust hat, sich hierinnfalls mehr umzusehen, kann oben erwähntes treffliches Werk von Tobias Mayr benutzen, so auch Vollimhaus, Helfenzrieders Geodäsie, Unterberger u. a. d. gl.

Ueber die Reduzierung der in verschiedenen Ländern üblichen Schuhen oder Füße.

Der Pariserfuß ist so zu reden die Basis der übrigen Fußmaase, weil er fast durchgehends unter allen übrigen Landschuhen der gröste ist. Er wird in 14400 gleiche Theile getheilt, und alle andern Füße werden in einer bestimmten Anzahl solcher Theile ausgedrückt. Nimmt man z. B. 13918 Theile davon, so hat man den rheinländischen Fuß. Folglich ist dieser ein Bruch von dem Pariserfuß und heißt $\frac{13918}{14400}$. So geht es auch bey andern Fußmaasen. Wie viele Theile man aber bey jedem Lande nehmen müsse, enthalten die vorhandnen Tabellen. Ich will hier nur einige der vornehmsten hersetzen.

Amsterdamer	12570
Anspacher	13200
Augsburger	13129
Berliner	13730
Baierischer	12938
Braunschweiger	12650
Breslauer	12600

Brüßler	12900
Kölner	12190
Dänische	14034
Danziger	12751
Frankfurter	12700
Königsberger	13640
Leipziger	12520
Londner	13511,54
Manheimer.	12865
Rheinländische	13913
Wiener	14011,7

Man ersieht aus dieser Tabelle, wie sich die Füße anderer Oerter untereinander verhalten. So z. B. zeigt es sich, daß der Amsterdamerfuß 12570 Theile vom Pariserfuße habe; der Berliner hingegen 13730. Weil diese Theile gleich sind, so kann ich mir vorstellen, als wenn der Berlinerschuh in 13730 gleiche Theile getheilt würde; wenn ich nun davon 12570 Theile nehme, so habe ich den Amsterdamerfuß, und es gilt die Gleichung

$\frac{12570}{13730}$ Berlinersch. = 1 Amsterdamersch.

Da bekannt ist, daß die Gleichung bleibt, wenn man beyderseits mit gleichen Zahlen multipliciert, so wird es leicht seyn, eine gegebne Zahl von Berlinerschuhen, in Amsterdamer zu verwandeln; denn man darf nur beyderseits mit dieser Zahl multiplicieren. Wir wollen setzen, es soll gefunden werden, wie viel Amsterdamerschuh 340 Berlinerschuh geben. Ich schreibe also die obige Gleichung an;

$\frac{12570}{13730}$ Berl. = 1 Amst.

× 340 × 340

$\frac{12570 \times 340}{13730}$ B. = 340 Amst.

Wenn nun wirklich multipliciert und dividiert wird, so ist die Auflösung fertig, und man erhält 311,2 Berl. = 340 Amst. was zu suchen war.

Wollte man umgekehrt finden, wie viel z. B. Berlinerschuh, 620 Amsterdamerfuß auswerfen, so muß man zuerst die Gleichung so ordnen, daß beym Berlinerfuß die Einheit in der Gleichung zu stehen komme, entweder durch Versetzung der Gleichung, oder durch ein neues Raisonement. Man theile nämlich den Amsterdamerfuß in Gedanken in seine 12570 Theile und nehme 13730 Theile davon, so hat man den Berlinerfuß in einem Bruch des Amsterdamerfußes, das heißt

$\frac{13730}{12570}$ Amst. = 1 Berl.

× 620

$\frac{13730 \times 620}{12570}$ Amst. = 620 Berl.

$\frac{8512600}{12570}$ Amst. = 620 Berl.

677,2 Amsterd. = 620 Berl.

Nicht viel unähnlich ist auch die Verwandlung zwischen dem Dezimal- und Duodezimalmaase. Es ist bekannt, daß die Geometer wegen der Bequemlichkeit im Kalkulieren den landüblichen Schuh nur in 10 Zolle, den Zoll in 10 Linien u. s. f. ein-

theilen,

theilen, im bürgerlichen Leben hingegen der nämliche Schuh nach althergebrachter Gewohnheit 12 gleiche Theile bekomme, die ebenfalls Zolle heißen, so wie auch die Zwölftheile eines Zolles Linien geben. Wie hat es man demnach anzugehen, wenn ein Maas in das andere verwandelt werden soll?

Wir wollen den Dezimalzoll, weil er natürlicher Weise größer seyn muß als der Duodezimalzoll, mit Z und den andern durch z, so auch die Linien durch L und l bezeichnen. Es ist nun richtig, daß

$$10\,Z = 12\,z;\ \text{folglich}$$
$$Z = \tfrac{12}{10}\,z = \tfrac{6}{5}\,z$$
$$\text{oder auch } \tfrac{10}{12}\,Z = z$$
$$\text{verkl. } \tfrac{5}{6}\,Z = z$$

Eben so ist auch $10\,L = 12\,l$, oder bey Scrupeln $10\,S = 12\,s$ u. s. f.

Ist also Z oder z unbekannt, so läßt sich dieß leicht aus der Gleichung finden. Z. B. Man soll 7 Dezimalzoll in Duodezimalzoll verwandeln. Sohin die erste Gleichung durch 7 multipliciert, giebt

$$7\,Z = \frac{7 \times 6\,z}{5}$$
$$7\,Z = \frac{42\,z}{5} = 8\tfrac{2}{5}\,z$$

Man kann sich also in dergleichen Fällen leicht helfen. Weitläuftiger schreibt hievon der schon öfter angerühmte Tobias Mair, erster Theil §. 18.

Etwas

Etwas zur Geschichte der Geometrie.

Tiefer zurück in die Vorzeit wird sich der spähende Blick der geometrischen Geschichte schwerlich mit einiger Zuverläßigkeit wagen dürfen, als bis auf Thales von Milet, jenen ersten der sieben Weisen, welcher zwischen den 590sten und 460sten Jahr vor Christi Geburt lebte; obgleich Laertes von einem gewissen phrygischen Euphorbus Meldung thut, welcher bey der Zusammensetzung verschiedner Linien auf die Konstruktion eines ungleichseitigen Dreyeckes gekommen seyn sollte; eine Erfindung, auf die ein jeder anderer bey so einem Geschäfte leicht von selbst verfallen mußte. Thales hat schon größere Verdienste um die Geometrie. Ihm haben wir die Lehrsätze von der Gleichheit der Vertikalwinkel, und der Winkel an der Basis eines gleichschenklichten Dreyeckes zu verdanken; ferner nach Proklus Zeugnisse von der gleichen Theilung des Zirkels durch den Diameter, und endlich den Lehrsatz, daß jedes Dreyeck, welches ein Peripherialwinkel mit dem Diameter schließt, rechtwinklicht sey. Von dem wichtigen Einfluße dieses Satzes in die übrigen Theile der Mathematik war er so sehr überzeugt, daß er dem Jupiter für diese Erfindung auf der Stelle einen Ochsen zum Opfer schlachtete. Wenn

es anbey wahr ist, was die alten Schriftsteller von ihm behaupten, daß er nämlich die runde Gestalt der Erde, die Ursache der Verfinsterungen der Sonne und des Mondes gelehret, daß er sogar Sonnenfinsterniße vorausgesagt, die eingetroffen sind, daß er den Kalender berichtigt, und zur Verbesserung der Schiffahrt den kleinen Bären zu benutzen gerathen, so kann dieser Mann nichts weniger als ein mittelmäßiger Geometer gewesen seyn; denn dieß zu leisten, werden keine gemeine Fortschritte in der Elementargeometrie erfodert. Man darf also mit Recht behaupten, daß er der erste war, der den Grund zu unsrer heutigen Geometrie geleget. Ob es lediglich vor ihm auf der ganzen weiten Erde keine Mathematiker, folglich auch keinen Geometer gab, ist eine Frage, die sich bloß mit der Möglichkeit, oder höchstens einiger Wahrscheinlichkeit bejahen läßt; denn es bleibt immerhin eine sehr gedenkbare Sache, daß es so manche blühende Reiche vor der Epoche Griechenlandes gegeben; deren Wissenschaften sammt ihren Namen von einem unseligen Verhängniße wie immer aus der Welt weggetilget wurden; da aber ohne Mathematik kein vollkommner Flor eines Landes statt haben kann, so bleibt es auch eben so gedenkbar, daß es vor dem Thales schon Gelehrte gegeben, die als Meister in diesem Fache gelten konnten. So viel ist indessen wahr, daß die Egyptier schon vor demselben einige Kenntniße der praktischen Geometrie gehabt haben müssen, wozu sie ganz natürlich die jährliche Ueberschwemung des Nilflußes zwang, um einem jeden wieder seinen Antheil von Fluren, im Falle die Gränzen zweifelhaft geworden, zurückzustellen. Indeß mag es mit ihrer Theorie elend ausgesehen haben, weil Thales, der

doch

doch in seinem Alter mit der Absicht dahin gereist war, um sich von den dasigen Priestern in dieser Wissenschaft unterrichten zu lassen, nichts weiter als einige praktische Kunstgriffe, z. B. die Höhen der Pyramiden durch Hilfe ihres Schattens zu messen, gelernt hat, und sich am Ende gezwungen sah, selbst hierinfalls etwas zu erfinden; denn sonst könnten ihm obige Lehrsätze nicht als eigne Erfindungen zugeschrieben werden.

Nach ihm kömmt Pythagoras, ein Mann, dessen Name allenthalben bekannt und aus mehr als einer Ursache unsterblich ist. Allein über sein Geburtsort sind die Meinungen der Gelehrten so getheilt, daß sich am Ende gar nichts zuverläßiges, geschweigens etwas gewisses davon behaupten läßt. Nach dem Urtheile der meisten soll er von Samos oder Sydon gebürtig seyn, und obigen Thales von Milet zum Lehrer gehabt haben. Seine Lebenszeit fällt um die Regierungsjahre des letzten Römerkönigs Tarquin des Stolzen. Er war der erste, der dieses Studium von Μαθηματα (wissenschaftliche Lehre) Mathematik nannte, indem ihm diese Benennung vorzugsweise zukömmt. Seine jugendlichen Jahre widmete er in Egypten den Wissenschaften und kehrte von da weg, nach einem zwanzigjährigen Aufenthalt, in vierzigsten Jahre seines Alters nach Italien, wo er seine gesammelten Kenntnisse durch eignes Nachdenken erweiterte, durch die wichtigsten Erfindungen bereicherte, seinen lehrbegierigen Zeitgenoßen davon mittheilte, durch Schriften, die uns aber der mißgünstige Zahn der Zeit schon längst entrissen, auf die Nachwelt fortpflanzte, und sich dafür den Lohn der Unsterblichkeit seines Namens einärndete.

Ihm haben wir den wichtigsten und anwendbarsten Lehrsatz zu verdanken, der in alle Theile der Mathematik den namhaftesten Einfluß hat, daß nämlich in rechtwinklichten Dreyecken das Quadrat der größten Seite gleich sey den Quadraten der beyden übrigen Seiten zusamm genommen. Er vermißte diesen Lehrsatz vorher sehr hart, und fand überall unausfüllbare Lücken, so wohl in der theoretischen als angewandten Mathematik. Daher die übergrosse Freude ob dessen Erfindung, daß er seinen Gottheiten sogar eine Hekatombe geopfert haben soll, welche Hekatombe entweder 100 Ochsen, oder nach Plutarch nur einen Ochsen bedeutet, oder was wahrscheinlicher ist, weil Pythagoras die Schlachtung der Thiere für unerlaubt ansah, 100 silberne Münzen, auf welchen das Gepräge eines Ochsen befindlich war; obwohl Plutarch unter diesen feyerlichen Opfer einen künstlichen von Mehl, und Porphyrius sogar einen aus Thon gemachten Ochsen versteht. Es sey dem, wie ihm wolle. Die Erfindung ist und bleibt unschätzbar. Von ihm wurde auch die allgemeine Eigenschaft jedes geradlinichten Dreyecks, daß alle Winkel zusamm zween rechten gleich sind, zuerst entdeckt. Er starb im 80sten Jahre seines Alters.

Nach ihm trat Sokrates und Plato auf, welche zwar die Geometrie fortpflanzten, aber eben keine nahmhaften Erfindungen machten. Ersterer verbot sogar, sich nicht zu viel auf diese Wissenschaft zu verlegen, weil vielleicht die Vorliebe zur Weltweisheit bey ihm zu groß seyn mochte. Indeß hatte er in einem gewissen Verstande auch Recht; denn wahre Gelehrsamkeit kann unmöglich auf einem

einzi-

einzigen Fache beruhen; und eben die angewandte Mathematik ist es, die die hellesten Kenntniße von allen Dingen und Sachen voraussetzt. Plato bezeugte sich mehr Gönner unsrer Wissenschaft. Tagstäglich wurde bey seinen Vorlesungen zu Athen ein geometrisches Problem aufgelöset, und er nahm keinen Zuhörer oder Schüler in seine Klasse auf, die Fremdlinge in der Geometrie waren. Beweise der Fortschritte auf eben genannter Schule in diesen Studium sind die Verdoppelung des Würfels, und die Quadratur des mondenförmigen Zirkelausschnittes durch Menechmus und Hippokrates von Chius.

Etwa 300 Jahre vor Christi Geburt sammelte **Euklides von Alexandrien** die bisher bekanntgewordenen Lehrsätze und Aufgaben der Geometrie in ein Handbuch, welches wir noch heut zu Tage in verschiedne Sprachen übersetzt besitzen, und gleichsam das Normal der Strenge geometrischer Beweise bleibt. Nach Pappus Schilderung war Euklides ein freundschaftlicher liebenswürdiger Mann. Auf die Frage des Königs Ptolomäus, ob es keine leichtere Methode gäbe, jemand diese Wissenschaft beyzubringen, als die seinige, soll er geantwortet haben: Non est regia ad Mathematicam via. Ein Denkspruch, den sich heut zu Tage so manche schöne Geister und faselnde Romanenseelen zu merken haben, die immer gerne solide Kenntniße erwerben möchten, ohne sich Mühe geben zu dürfen. Dieser Euklides von Alexandrien muß aber wohl von jenem sauertöpfischen Philosophen von Mägara unterschieden werden, der ebenfalls diesen Namen führt, aber nichts mathematisches geschrieben hat, wie sich dieß aus dem Diogenes

nes Laertius abnehmen läßt, der alle dessen Schriften anführt, und ihn ziemlich unvortheilhaft schildert.

Archimedes von Syrakus, der 287 Jahre vor Christi Geburt auf der Insel Sicilien gebohren wurde, wagte sich über die Berechnung des Zirkels und der Kugel. Plutarch macht ihn zum nahen Anverwandten des Königs Hiero. Konon von Samos, gleichfalls ein Mathematiker, war sein Freund, dem er auch in seiner præf. ad quad. parab. das Zeugniß giebt, daß er ein überaus geschickter Geometer gewesen. Archimed soll manchmal so vertieft in den göttlichen Wahrheiten der Mathematik gewesen seyn, daß er Essen und Trinken darüber vergaß, und sich seine Bedienten oft gezwungen sahen, ihn darauf zu erinnern. Seine Bemühungen verrathen auch wirklich einen der scharfsichtigsten Köpfe, da ihm Aufschlüsse durch Synthetik gelangen, die die neuern großen Geister nur auf den Weg der höheren Analyse gewinnen konnten. Wallis, jener brittische Mathematiker, der die Bahn zu dieser Analytik oder Rechnung des Unendlichen eröffnete, sagt vom Archimedes: Vir stupendae sagacitatis, qui prima fundamenta posuit inventionum fere omnium, de quibus promouendis aetas nostra gloriatur. Ohne von seinen übrigen großen Erfindungen etwas zu sagen, entdeckte er ein sehr simples Verhältniß des Diameters zur Peripherie im Zirkel, nämlich 7 : 22. Obgleich die neuern Geometer durch schärfere Rechnungen, wie wir am gehörigen Orte schon erwähnten, es in etwas fehlerhaft fanden; so war selbes doch für die Bedürfnisse damaliger Zeiten ein wichtiges Geschenk, und überdieß auch ein großer Beweis des Tiefsinns dieses alten Mathematikers. Von

noch

noch größerer Schärfe aber zeugt sein erfundner Lehrsatz: daß die Kugel zween Drittheilen einer Walze gleicht, die Höhe und Grundfläche mit der Kugel gemeinschaftlich hat. Der Beweis dieses Satzes, oder eigentlich wieder der synthetische Weg zur Erfindung, hat die gröste Aehnlichkeit mit der Rechnung des Unendlichen, weil die Durchschnittslamellen des Kegels und der Kugel so unendlich dünne gedacht zu werden verlangen, daß sie ganz jenen Lamellen gleich geschätzt werden dürfen, die die Walze giebt. Wirklich gefiel er sich auch selbst in dieser Erfindung sowohl, daß er sie auf sein Grabmal zu meisseln befahl. Man befolgte auch seinen Willen. Denn Cicero war ein Augenzeuge von diesem Monumente, wie er sich als Quästor in Sicilien befand; und weil hohes Gebüsch dasselbe bereits ganz unsichtbar gemacht hatte, so ließ er den Ort reinigen, und rief so dessen Andenken auf ein neues aus der undankbaren Vergessenheit der Mitbürger desselben hervor.

Von den Griechen müssen wir noch den Architas nennen, der von seiner Geschicklichkeit durch die Auflösung der Frage: wie zwischen zwo Linien zwo andere Proportionallinien zu finden sind, hinlängliche Proben gegeben. Die Römer haben nicht viel Geometer aufzuweisen. Der einzige Manlius, oder wie andere wollen, Manilius zeichnete sich dadurch aus, daß er zu Augusts Zeiten auf dem Marsfelde einen Prachtkegel errichtete, wodurch er die Aequinoktien und Solstitien zu bestimmen suchte, welcher aber nach 30 Jahren, wie Plinius versichert, unbrauchbar geworden. Sein Verfahren dabey verräth viel geometrische und astronomische Kenntniß.

Wie nun alle Wissenschaften nach der Erlöschung des griechischen und römischen Flores tief schlummerten, so gieng es auch der Geometrie und den übrigen mathematischen Wissenschaften. Nur einzelne Köpfe hie und da beschäftigten sich mit ihr. So z. B. brachte Campanus von Navarra im eilften Jahrhundert den Euklides aus Arabien mit, und suchte ihn durch seine Uebersetzung gemeinnützig zu machen. Er schrieb auch von der Quadratur des Zirkels etwas.

In diese Zeit fällt auch jener persische Mathematiker Nassir Eddin, welcher unter der Regierung des Holagu, von dem bekannt ist, daß er um das Jahr 1254 Persien eroberte, im ausgebreiteten Ruhme stand. Verschiedene Werke, die wir von ihm noch besitzen, beweisen hinlänglich, daß er der größte Geometer seiner Zeit gewesen seyn müsse. Auch er schrieb einen Kommentar über den Euklid, wo er sehr strenge Beweise dieser Sätze auf die Bahn bringt. Dieses Werk wurde 1590 in der Medizäischen Druckerey im Original herausgegeben.

Im dreyzehnten Jahrhundert reiste Athelard, ein Mönch und englischer Mathematiker, nach Spanien und Egypten, und brachte ebenfalls des Euklides Geometrie mit sich, die auch er in seine Muttersprache übertrug. Nicht lange nach ihm kommentierte Barlaam, ein griechischer Mönch, über eben dieselbe. Im fünfzehnten Jahrhunderte las Franziskus Maurolykus zu Messina über die Sphäre und die Elemente des Euklides. Gegen Anfang des sechszehnten Jahrhunderts machte sich vorzüglich Ludolph van Ceulen (von Köln) ein holländischer Gelehrter und Professor der Mathematik zu Leiden, durch das

beste

beste Verhältniß des Diameters zur Peripherie bekannt. Hildesheim war seine Vaterstadt. Im Jahre 1682 gab Thomas Fautet de Lagni einen Traktat von der Quadratur des Kreises heraus, der sehr wohl aufgenommen worden.

Um die nämliche Zeit fand ein anderer holländischer Mathematiker Peter, oder wie andere wollen, Adrian Metius ebenfalls ein ziemlich gutes Verhältniß des Diameters zur Peripherie. Er setzte selbes wie 113 : 355 an. Die Veranlassung hiezu war die vermeinte Quadratur des Zirkels eines gewissen Simon von Eick. In wie fern obiges Verhältniß richtig sey, haben wir schon am gehörigen Orte §. 204 gezeiget.

In Frankreich blühten dazumal bereits schon die Wissenschaften, und unter andern auch die Geometrie, so wie alle anderen Theile der Mathematik. Die großen Männer Pikard, de la Hire, Cassini, l'Hospital, der schon in seinem zwölften Jahre 32 Sätze vom Euklid, so wie de la Caille ihn ganz ohne Lehrer und Bücher verstand, Richer, Desargulier, Bouguer, de Luc u. m. a. haben zu entschiedne Verdienste um die Geometrie, vorzüglich durch geographische Vermessungen, als daß sie nicht eine Epoche in dieser Geschichte machen sollten.

Enblich kommen wir auf Christian Wolfen, welcher der erste war, der sowohl in der Philosophie als Mathematik, und mit ihr auch der Geometrie eine andere Gestalt im Deutschlande gab. Er leistete in diesem Fache gerade das, was Gottsched in der deutschen Sprache und Dichtkunst geleistet hat. Ob

sich gleich seine Elemente bey weiten nicht mit den Werken der heutigen Mathematiker, eines Kästners, Eulers, u. d. gl. messen dürfen, so zündeten sie doch Licht in unserm deutschen Vaterlande an, und trugen zur Aufnahme der Geometrie und übrigen Mathematik sehr vieles bey. Wolf war eines Lohgerbers Sohn in Breslau, und wurde 1679 daselbst gebohren. In Sturms Mathesi enucleata, und nachher in dessen Tabulis in vniuersam Mathesin fand er seine ersten Anfangsgründe zur Geometrie. Der große Leibniz wurde sein Freund. Er bekleidete zuerst eine öffentliche Lehrstelle der Mathematik in Halle, wo ihn aber Fanatismus vertrieb, von da gieng er nach Marburg und ward Hofrath und Professor der dasigen hohen Schule, wurde aber wieder von Friedrich den zweyten, König in Preussen, durch ein eigenhändiges Schreiben nach Berlin gerufen; als er aber lieber in Halle zu seyn wünschte, so bewilligte ihm der König auch dahin zu reisen, wo er neben einem jährlichen Gehalt von 2000 Rthl. den Titl eines geheimen Raths und Vicekanzlers, und noch anbey die Freyheit erhielt, alles zu lehren, was und wie er wolle. Hier verlebte er seinen übrigen Rest der Jahre in Ruhm und Friede.

Seine lateinischen Anfangsgründe wurden eine geraume Zeit unter die nützlichsten und gelehrtesten Werke in diesen Fache gerechnet. Auch seine deutschen Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften blieben sehr lang das beste und gründlichste Vorlesbuch auf hohen Schulen; bis endlich selbe durch bessere, z. B. durch die Schriften eines Hausens, durch Segners Lehrbuch, durch Karsten, Kästner, und zum Theil auch durch Klemm verdrängt wurden.

Abt Friderich Häseler hat seit den Jahren 1776 bis 1790 Anfangsgründe in 4 Bänden geliefert, welchen, mit Wahrheit zu reden, wegen Deutlichkeit, Solidität und Vollständigkeit, (vorzüglich wenn man sie aus dem Gesichtspunkte betrachtet, für wen er eigentlich schrieb) wenige Lehrbücher an die Seite gesetzt werden können.

Der blühende Zustand der Geometrie in unsern Tagen darf nicht erst durch Lobsprüche erhoben werden. Die besten Schriften dieser Wissenschaft, welche bereits in den Händen eines jeden Gelehrten sind, die bewunderungswürdige Akkuratesse und Gelenksamkeit, die der erfinderische Kunstfleiß eines unvergeßlichen Branders verschiednen Meßwerkzeugen zu geben wußte; vorzüglich die Erfindung des Verniers, welche (im Vorbeygehen gesagt) fälschlich einem gewissen Nonius zugeeignet wird, haben neben der Theorie auch überdieß die praktische Geometrie zum höchsten Gipfel der Vollkommenheit erhoben.

Das Alter der Trigonometrie zählt nicht so viele Jahrhunderte als die Geometrie. Die ersten Spuren ihrer Erfindung treffen wir bey Klaudius Ptolemäus an. Dieser hatte einen Auszug aus des Hipparchus 12 Büchern, die von lauter Dreyecken handelten, in seinem Almagest gemacht, von welchem Hipparch auch Theon (in Comment. Almag. Lib. I. c. 9. eine Schrift anführt, welche von den Chorden oder Sehnen handelte. Hipparch soll nach einiger Meynung ein Zeitgenosse des obgenannten Ptolomäus, welchen sie ebenfalls mit ihm zwischen die 153ste und 164ste Olympiade setzen, gewesen seyn. Andere hingegen trennen den Ptolo-

mäus mehr als dreyhundert Jahre von Hipparchus. Genug, sie sind die beyden ersten, die uns Winke zur Erfindung der Trigonometrie gegeben.

Hundert Jahre nach Christi Geburt beschäftigte sich Menelaus von Alexandrien mit der Astronomie, und vorzüglich mit trigonometrischen Rechnungen. Auch von ihm besaß man einst ein Werk, worinn die Lehre von den Sehnen abgehandelt war. Es ist aber bekannt, daß die Alten statt den halben Chorden oder Sinussen die ganzen Chorden in ihre Trigonometrie aufnahmen. Menelaus schrieb auch 3 Bücher von den sphärischen Dreyecken, die noch vorhanden sind, und wo sein tiefer Forschgeist sattsam hervorblickt.

So nun in diesem rohen Zustande blieb die Trigonometrie bis in das fünfte Jahrhundert, wo endlich Georg Purbach, Professor der Mathematik in Wien, statt den Sehnen die Sinusse einführte, und den Radius oder Sinus totus in 600000 Theilen dabey zum Grunde legte. Sein Schüler aber Regiomontanus, eigentlich Johann Miller von Königsberg, der auch unter der gelehrten Travestierung seines Namens Molitor, oder Joh. Germanus, oder auch Joh. Frankus vorkömmt, sah das Mühsame bey diesem Kalkul bald ein, und nahm statt 60000 vielmehr 1000000 Theile des Radius an. Er berechnete auch wirklich nach diesem Systeme einen Quadranten des Zirkels von Minuten zu Minuten, und war nebenher der Erste, welcher die Tangenten in der Trigonometrie zu benützen lehrte, und gleichfalls Tafeln dafür, wie bey den Sinussen bearbeitete.

Ungeachtet dieser großen Erleichterung blieben doch die trigonometrischen Rechnungen immer noch eine verdrüßliche mühsame Arbeit. Aber bald brach ein glücklicherer Zeitpunkt in Brittanien für die Trigonometrie und andere Theile der Mathematik an. Es wurden dort durch Johann Neper die Logarithmen zur grösten Wohlthat der mathematischen Welt erfunden. Kepler schreibt diese Erfindung dem Jost Bürge, Hofmechanikus von Hessenkassel, zu. Indeß scheint es, daß Neper und Bürge, jeder für sich, diese Entdeckung gemacht, und keiner von den andern etwas gewußt habe. Erfand ja auch Leibnitz und Neuton, wie wir bey der Geschichte der höhern Mathematik hören werden, jeder für sich die Differentialrechnung; folglich ist auch dieser Fall sehr wohl möglich. Prof. Tanzer will sogar Grafen Herwart von Hohenburg zur Ehre der baierischen Nation als den ersten Erfinder dieser Logarithmen angeben. Seine Beweise sind auch in der That nicht so nnerheblich, als daß man die Wahrscheinlichkeit läugnen könnte. Wenigst ist gewiß, daß Herwarts Tafeln, die eine gewisse Art von Logarithmen enthalten, 4 Jahre vor der Ausgabe der neperischen Tafeln im Drucke erschienen. Wir lassen die Sache dahin gestellt seyn, und merken dabey an, daß die Logarithmen welche man dermal besitzt, weder von Neper noch von Bürge, noch auch von Herwart, sondern von Heinrich Briggs, Prof. zu Oxfort berechnet worden sind, welcher sie 1624 in seiner Arithmetica logarithmica bis auf 20000 herausgegeben, wozu aber Ursinus und Vlacq mit der Zeit Nachträge gemacht; da ersterer die Logarithmen von 10 zu 10 Sekunden, und letzterer die der Ordnungszahlen von 20000 bis 90000 hinzugethan.

Wir

Wir wollen uns mit Neper und Briggs diesen großen Wohlthätern etwas näher bekannt machen. Letzterer ward zu Warleywood in der Grafschaft York beyläufig um das Jahr 1680 von armen Eltern gebohren: ersterer aber sein Zeitgenoß in Schottland, und schrieb sich Baron von Merchiston. Briggs reiste im siebenzehnten Jahre seines Alters nach Cambridge, und widmete sich auf dasigen Schulen ganz seinem Lieblingsstudium der Mathematik. Er brachte es hierin so weit, daß, als im Jahr 1596 zu London das berühmte Greshams-Collegium gestiftet wurde, er in selben als erster Professor der Geometrie aufgestellt wurde, wo er bald das Glück hatte, mit dem nachherigen Erzbischof Usser in geheime Freundschaft zu tretten. Seine ersteu Bemühungen der Nebenstunden schenkte Professor Briggs der Astronomie. Er versuchte es, aus den Prutenschen Tafeln eine Tabelle künftiger Finsternisse zu berechnen; aber Keplers Theorie des Planetensystems, welche gerade damals bekanut wurde, machte einen kleinen Strich durch seine Rechnungen. Indeß fuhr er doch fort andere nützliche Tafeln für die Astronomie zu verfertigen. Als Nepers Logarithmen erschienen, erregte diese Erfindung Briggs ganze Aufmerksamkeit. Er schrieb an Nepern und entdeckte ihm seine Gedanken hierüber, worunter hauptsächlich die Bemerkung war, daß das Logarithmensystem weit mehr Bequemlichkeit gewänne, wenn der Log. 1 = 0 und Log. sin. tot. = 1000 angesetzt würde. Worüber ihm Neper, zu welchen jener den Sommer darauf gereist war, und sich ein ganzes Monat mit ihm unterhielt, auch Dank wußte, mit dem Beysatze, daß er selbst schon diese Meynung geheget; aber wegen Krankheit und

anderen

anderen Geschäften vom Belange keine Musse habe dazu finden können.

Als Briggs wieder nach Hause gekehrt war, fieng er das mühsame Werk der Logarithmenberechnung bereits an. Ein gewisser Eduard Wright übersetzte seine Arbeiten in's Englische, unterwarf es Nepers Prüfung, und wollte sie zum Drucke befördern. Allein weil jener darüber starb, ward dieß seinem Sohne vorbehalten, der es auch 1616 zu London wirklich that, wozu Briggs eine Vorrede schrieb. Das Jahr darauf stattete Briggs Nepern einen zweyten Besuch ab, und es würde vielleicht noch öfter geschehen seyn, wenn Neper nicht 1618 mit Tod abgegangen wäre. Briggs wurde nachher erster Professor der Geometrie zu Oxford, wo Savile zwo Lehrämter gestiftet, nachdem er bereits 23 Jahre an dem Greshamskollegium geglänzt hatte. Hier gab er 1620 die ersten 6 Bücher vom Euklid, und 4 Jahre darnach seine Arithmeticam logarithmicam heraus. Er starb den 26. Jäner 1630, zwölf Jahre nach seinem Freund Neper.

Berichtigungen.

Seite	Linie	statt	lies
28	10	rechtwinklichten	rechtwinklichten gleichschenklichten
29	16	Fig. 8. Nro II	Fig. 7. Nro 2.
39	29	Grundlinie	Grundlinie und Höhe
46	21	sowohl zum benachbarten u. s. f.	sowohl zu eben diesem Parallelogram, als das ganze Dreyeck selbst zu jedem Quadrate der Lothen hinzudenkt. u. s. f.
47	14	$bc = bq$	$bc = cq$
48	25	35,9	35,7
51	27	rechten Winkel	Winkel
65	10	fb	fg
66	6	ab	ab,
—	27	al	ac
78	4	ac^2	ab^2
—	8	ab + ab	ab × ab
82	3	P	P
—	4	lc	dc
85	15	viel r giebt	viele giebt
—	23	Fig. 102	Fig. 100
86	5, 9 u. 10	c	d
90	14	$\sqrt{2-2\sqrt{2}}$ &c.	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$ &c.
101	18	Grundfläche	Grundlinie
110	21	$\sqrt[3]{\pi^2 S}$	$\sqrt[3]{6\pi S}$
133	18	tang : R =	Tang : R =
134	1	ae	ai
135	9, u. 10	o	n
—	9	x	y
138	2	oder auch weniger	oder auch 1, weniger
144	12 u. 17	540	590
—	13 u. 17	320	370
146	15	X (ab+ai) bi X bf	X (ab — ai) = bi X bf
—	18	x bf	x = bf
162	31	Winkeln	Winken

S. 190 L. 24 u. 28 so auch S. 191 L. 8 lese man Amsterdamerschuh statt Berlinerschuh, und wechselweise.

Tafel der Geometrie

f Fig 2

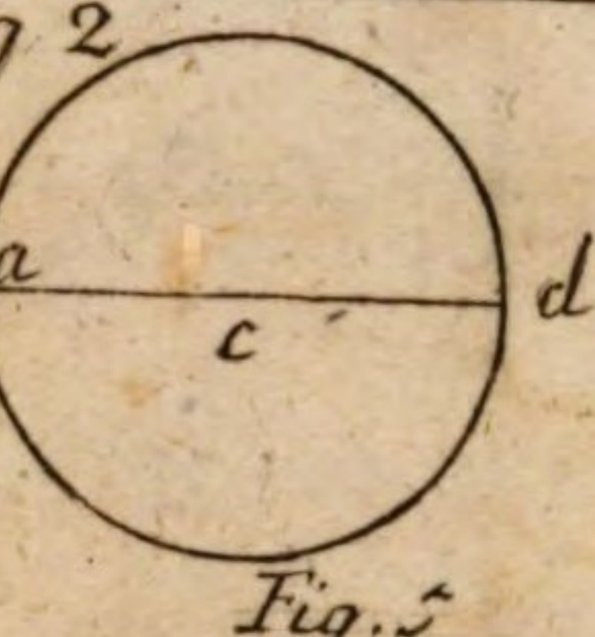


Fig. 3

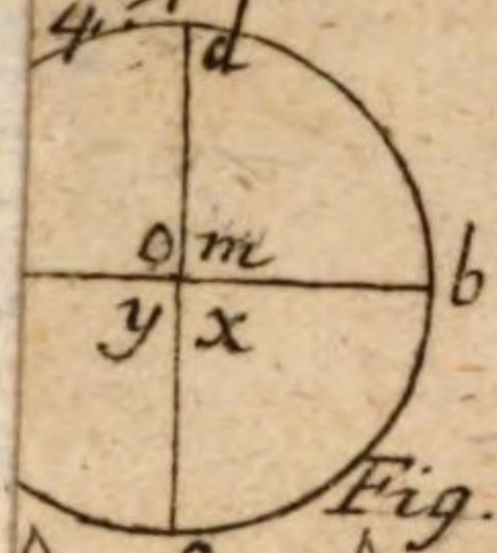
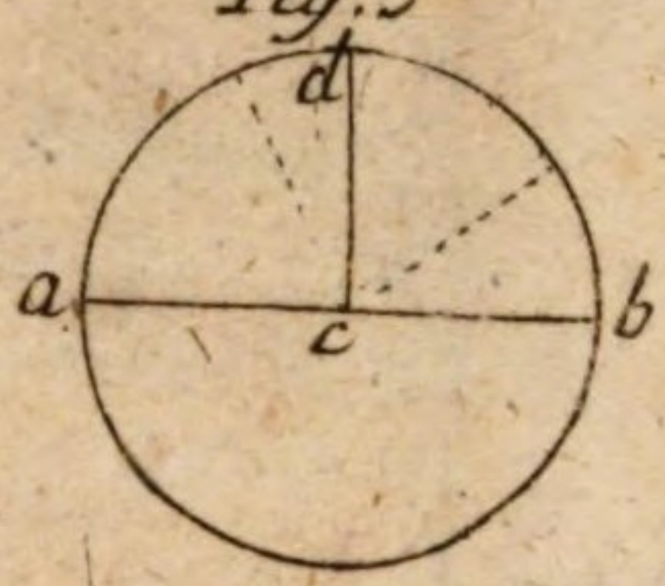


Fig. 7.



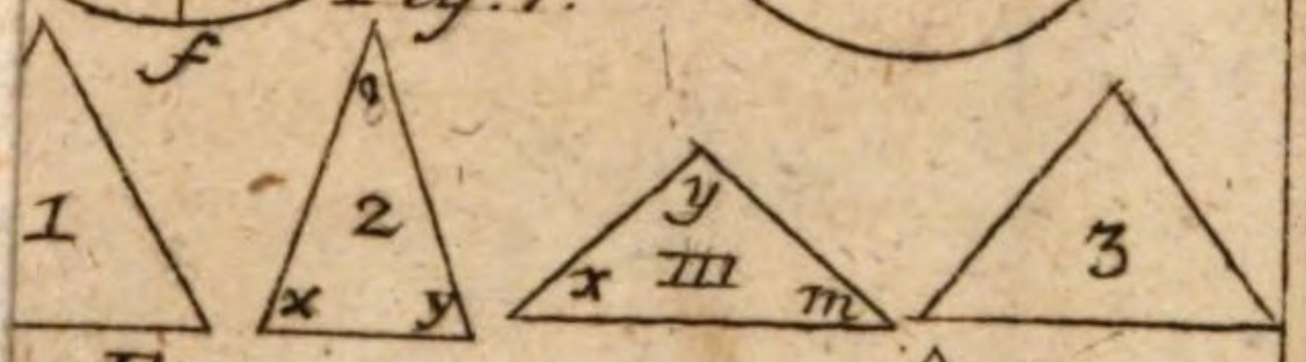


Fig. 8.

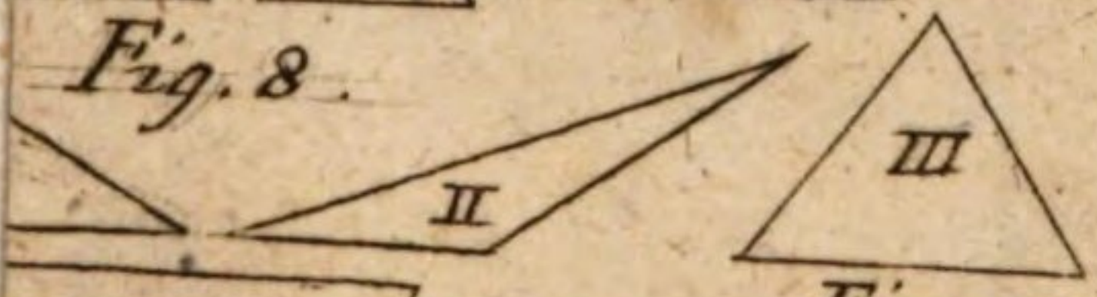


Fig. 11.

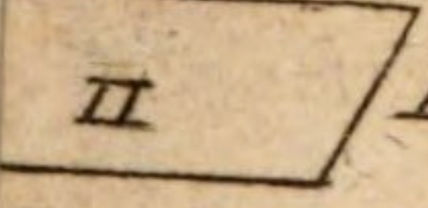


Fig. 10.

12.

ad Fig. 14.

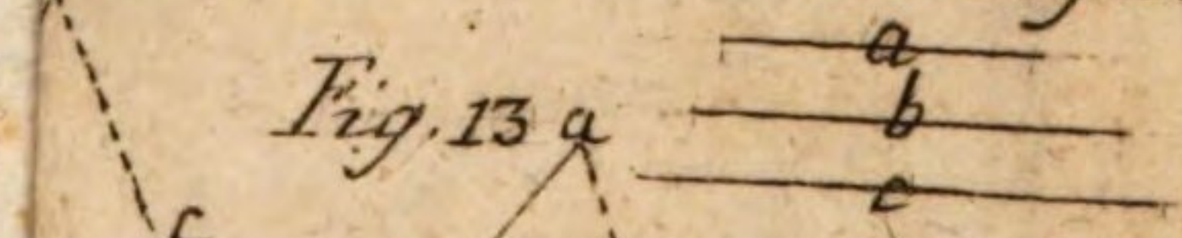


Fig. 13

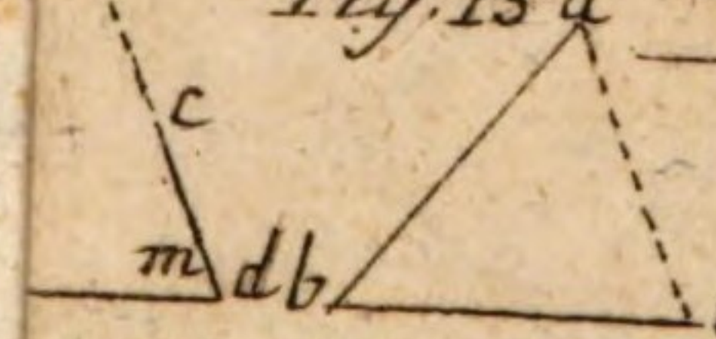


Fig. 16.

Fig. 15.

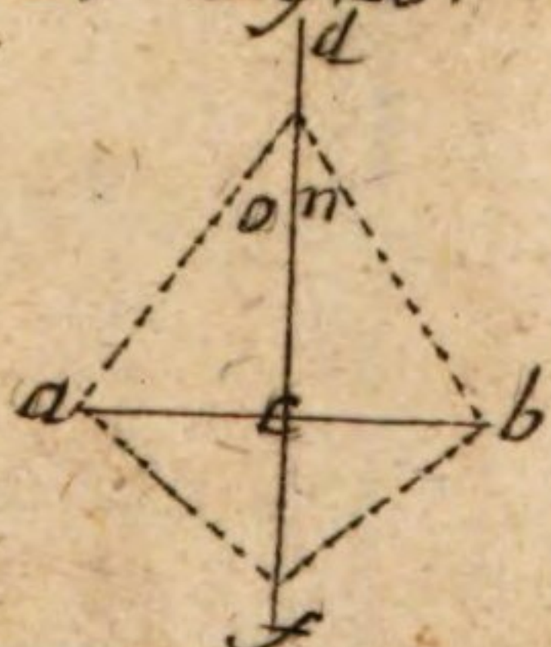


Fig. 19.

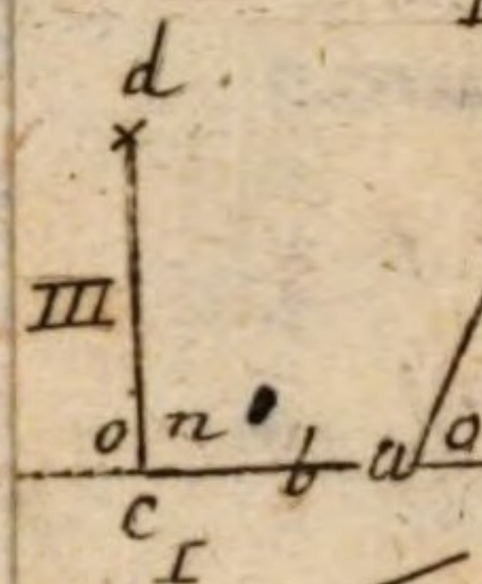


Fig. 20.

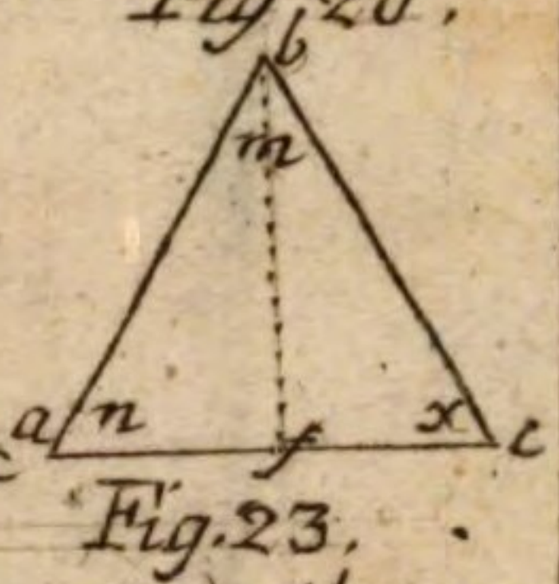


Fig. 23.

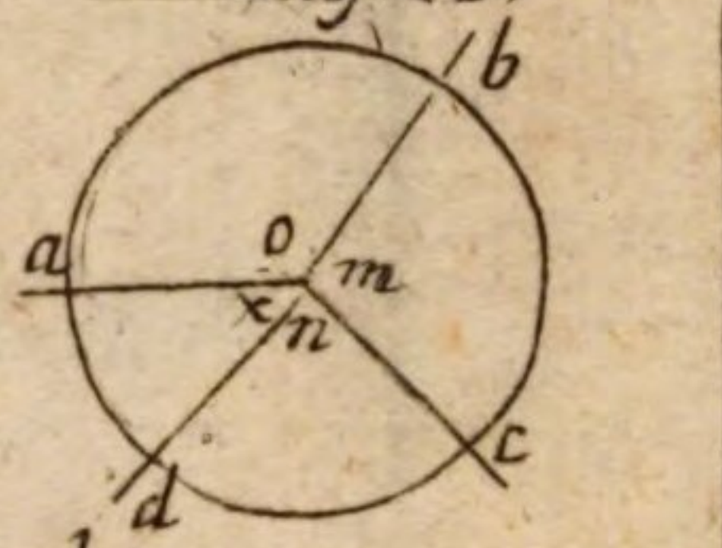
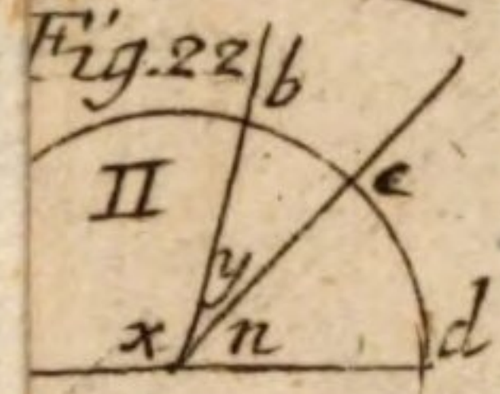


Fig. 22.



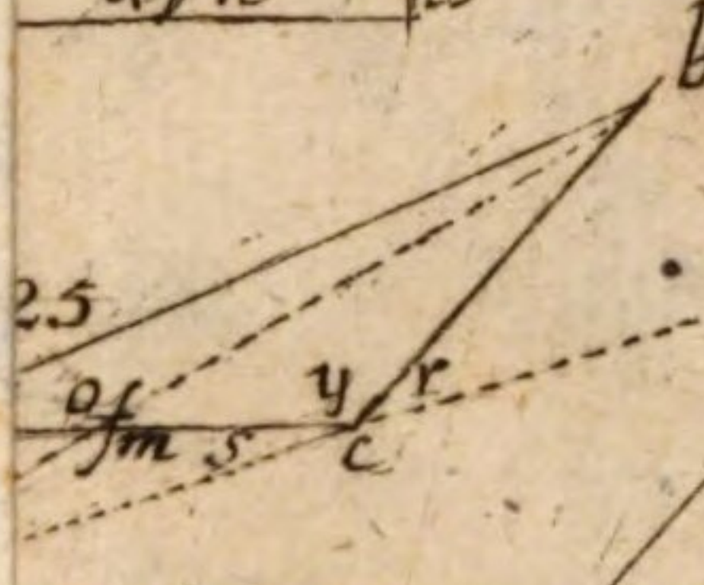


Fig. 26.

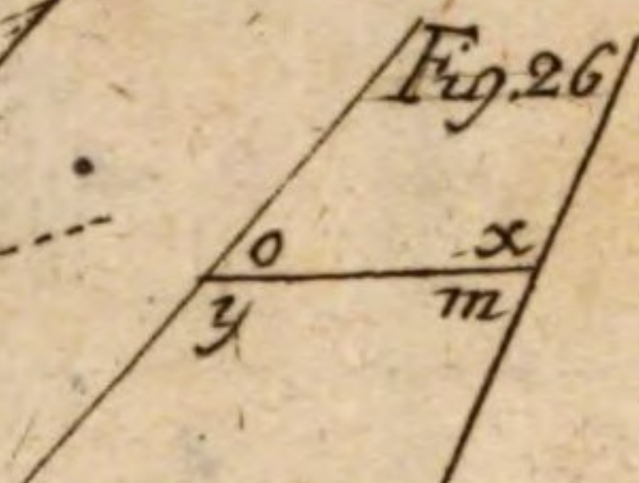


Fig. 28.

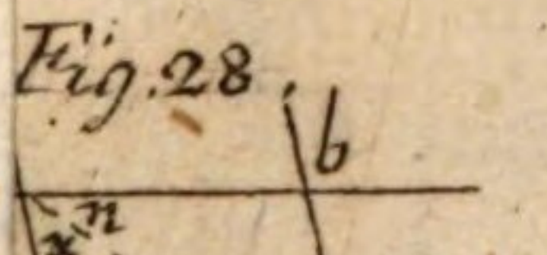


Fig. 29.

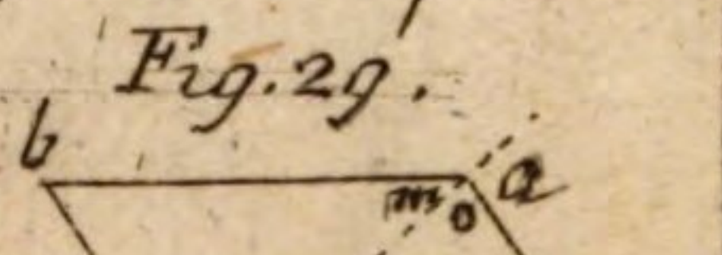


Fig. 31.

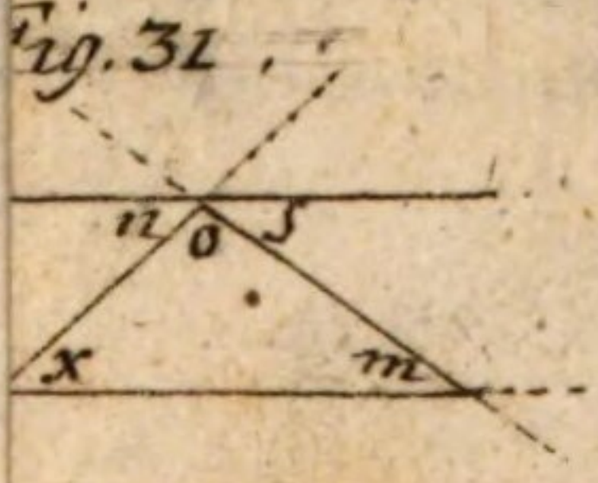


Fig. 32.

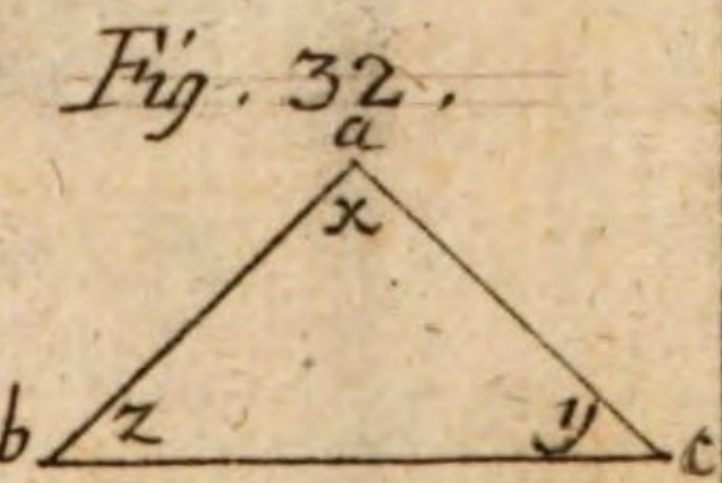


Fig. 34.

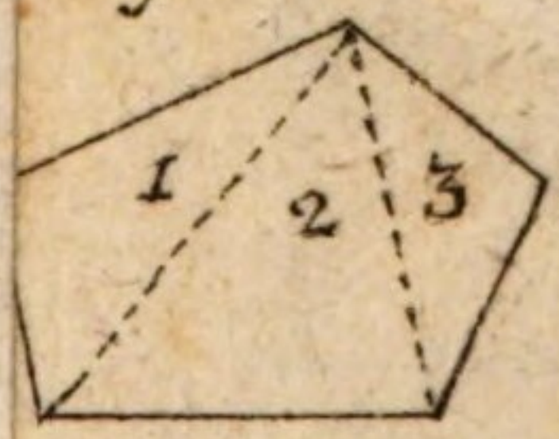
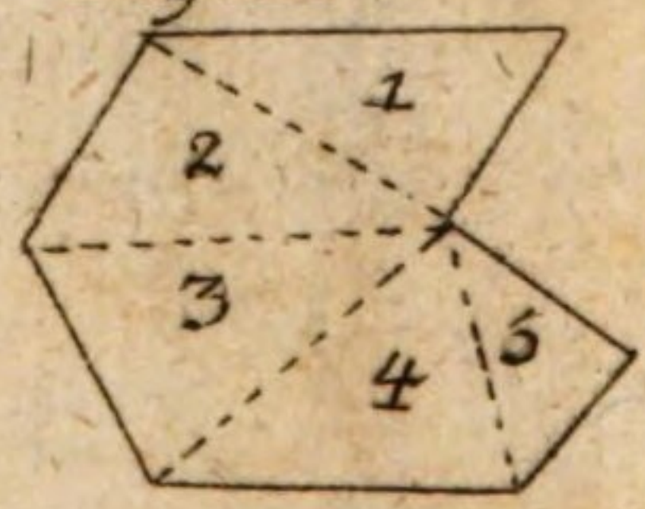


Fig. 35.



Tafel der Geometrie

Fig. 37.

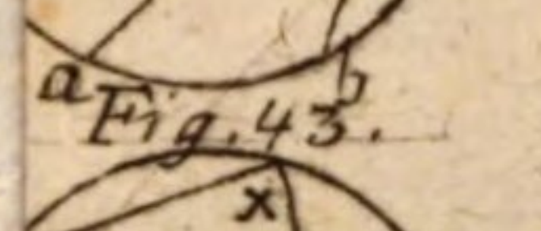


Fig. 38.

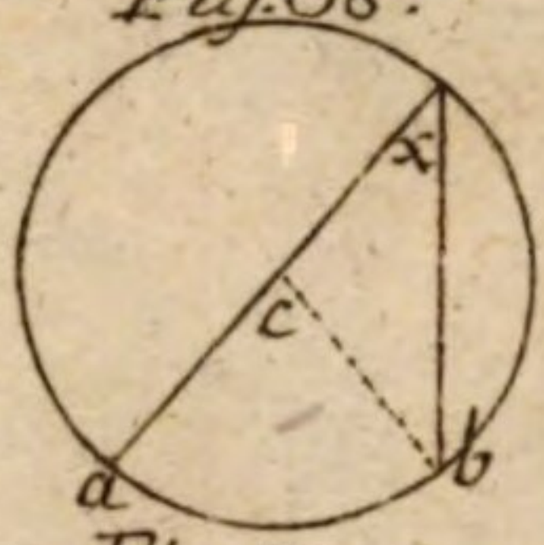


Fig. 40.

Fig. 41.

Fig. 43.

Fig. 44.

Fig. 46.

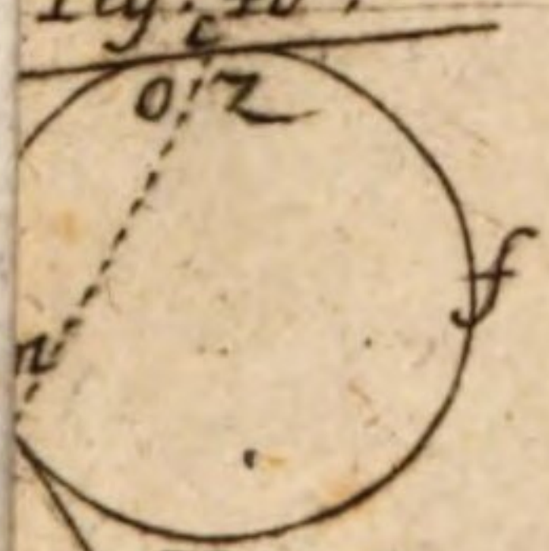


Fig. 47.

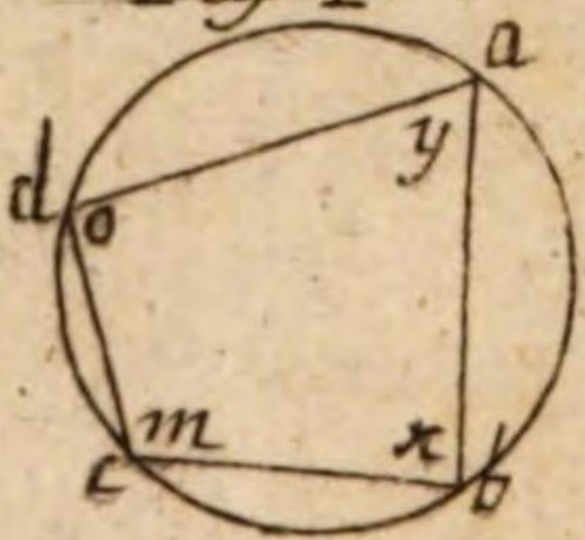


Fig. 49.

Fig. 50.

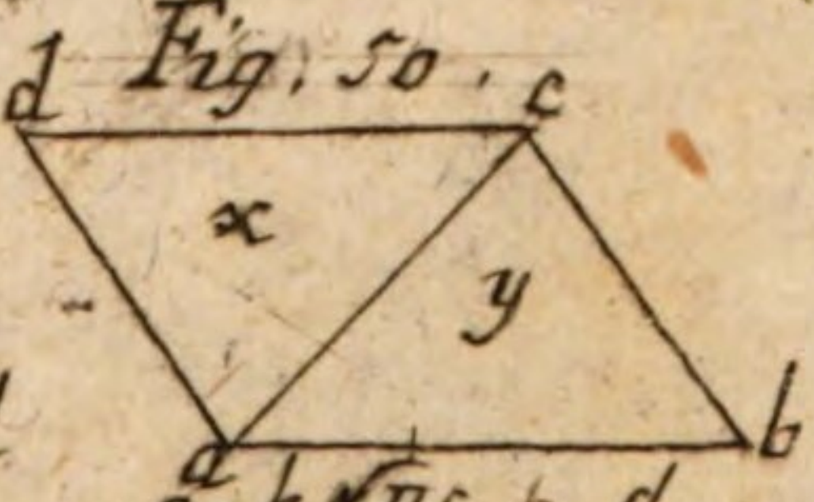
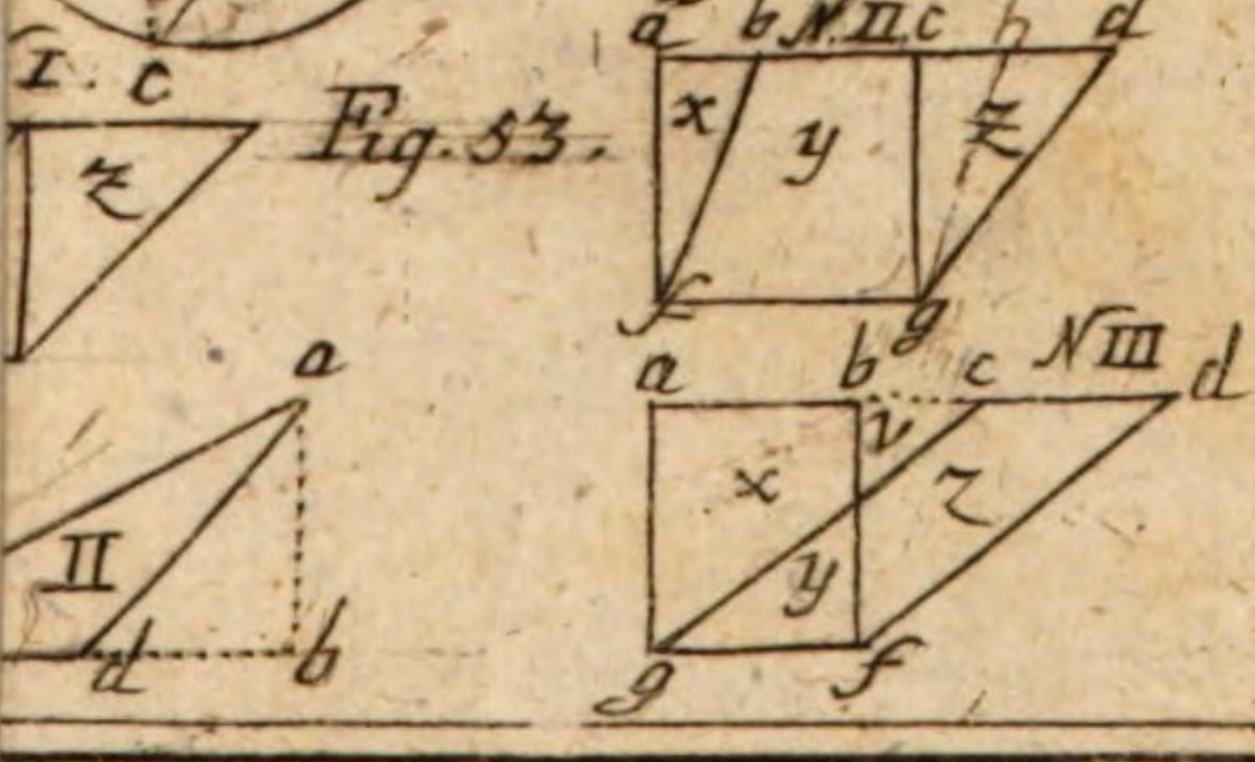


Fig. 53.



Tafel der Geometrie.

Fig. 55.

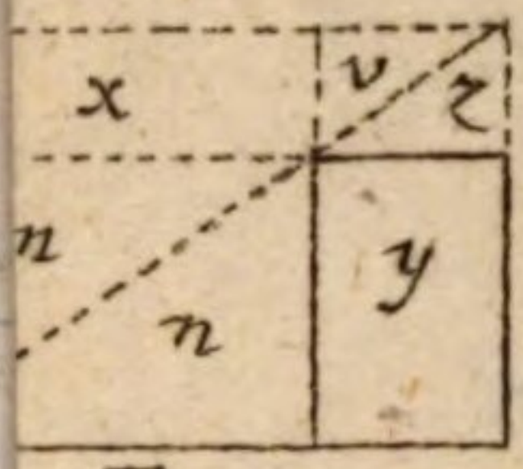


Fig. 56.

Fig. 58.

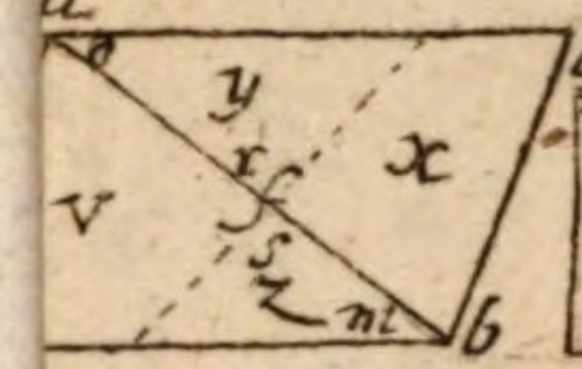


Fig. 59.

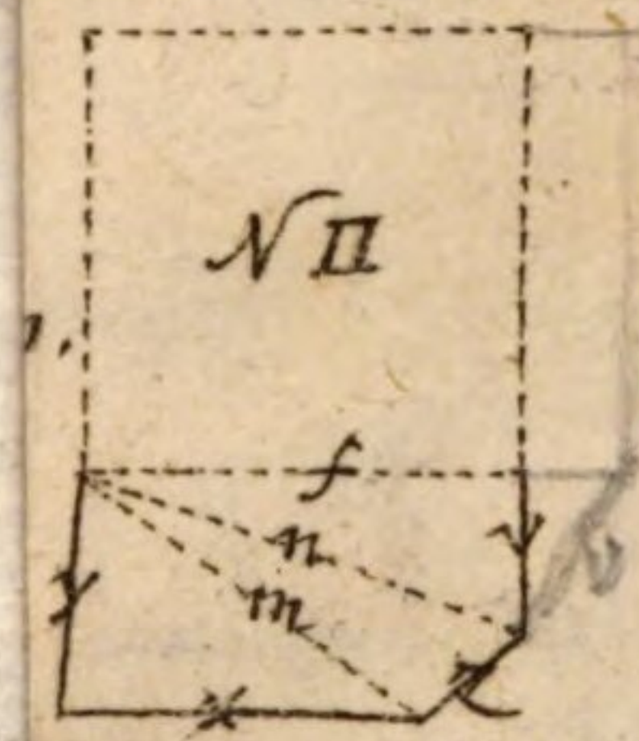
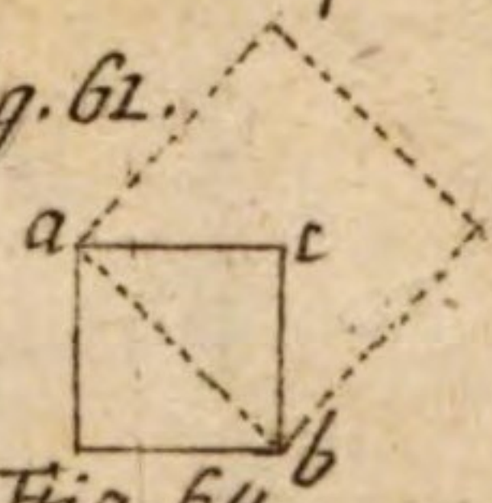


Fig. 62.



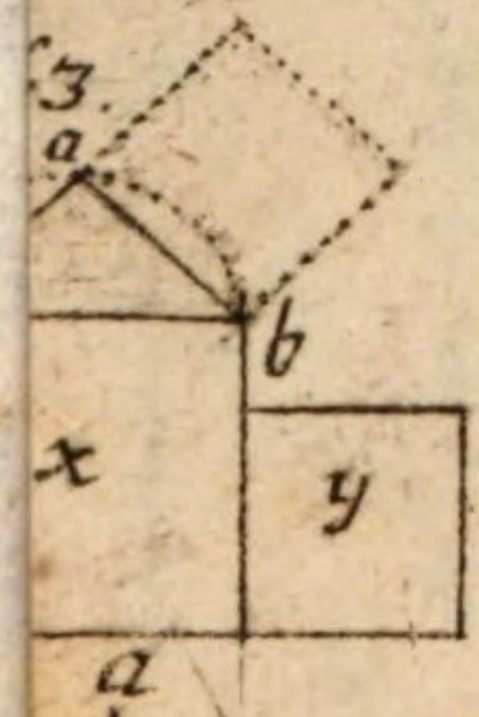


Fig. 64.

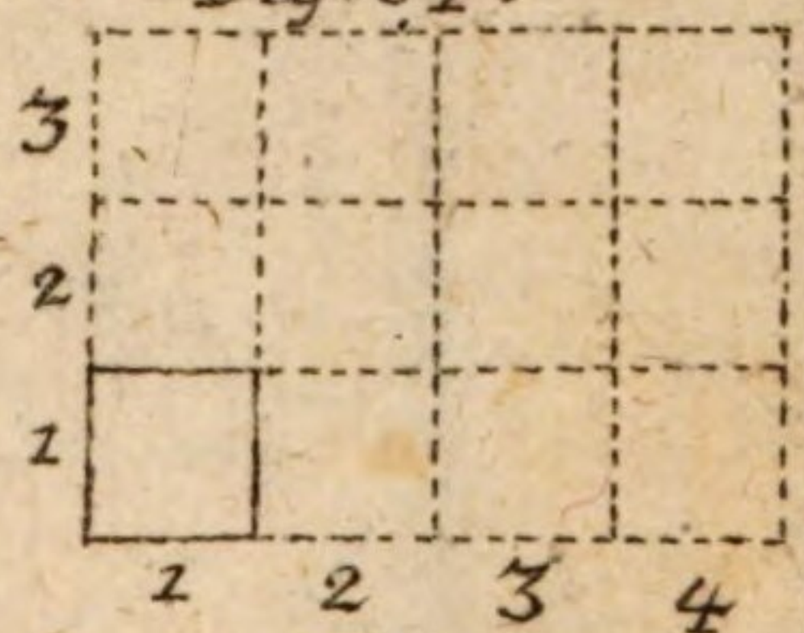


Fig. 66.

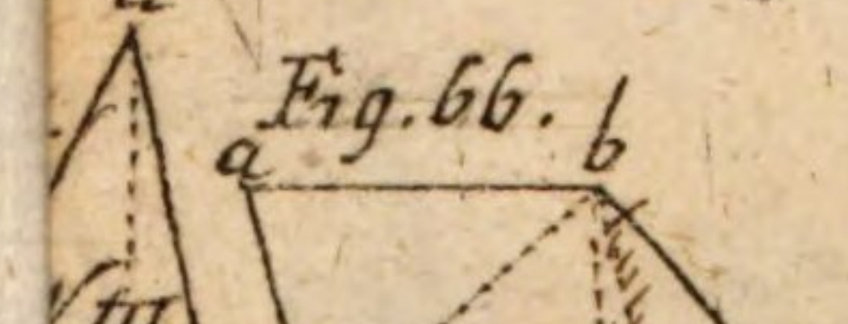


Fig. 67.

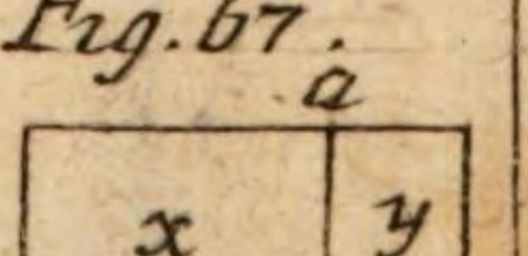


Fig. 69.

Fig. 70.

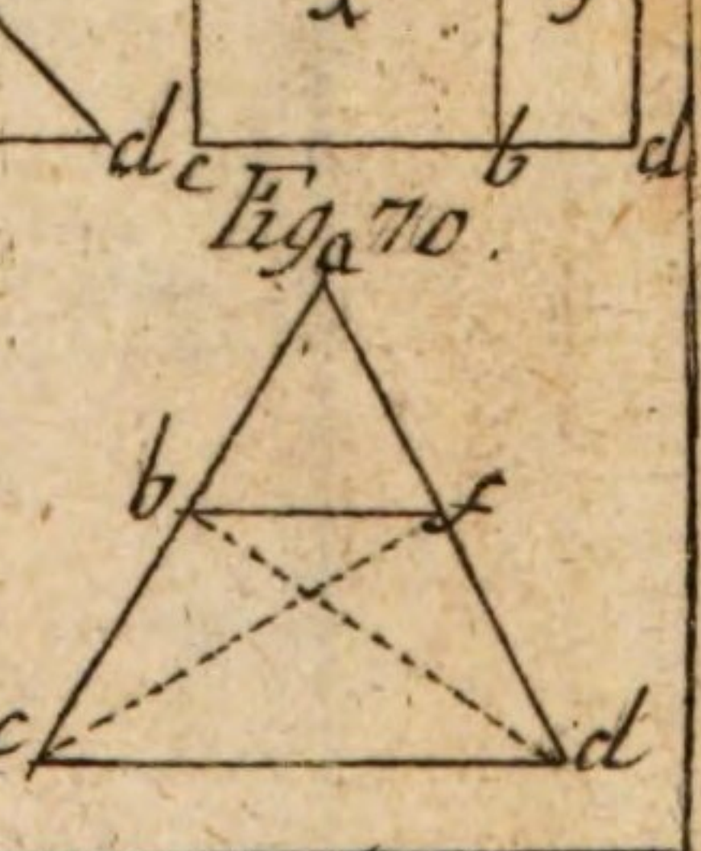


Fig. 72.

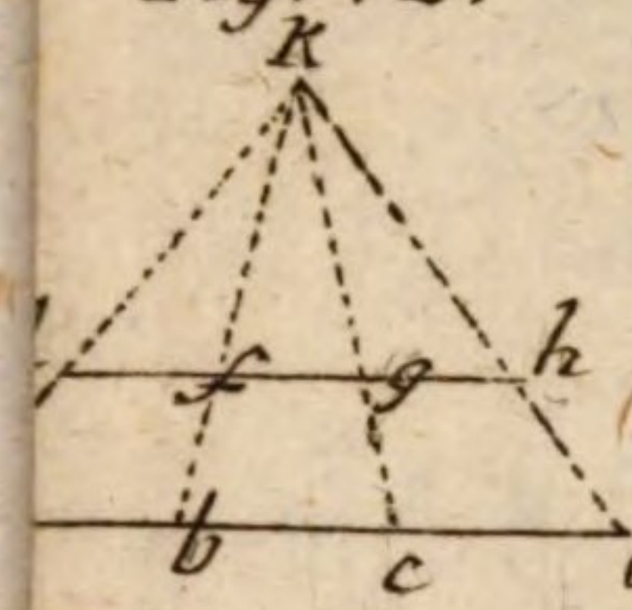


Fig. 73.

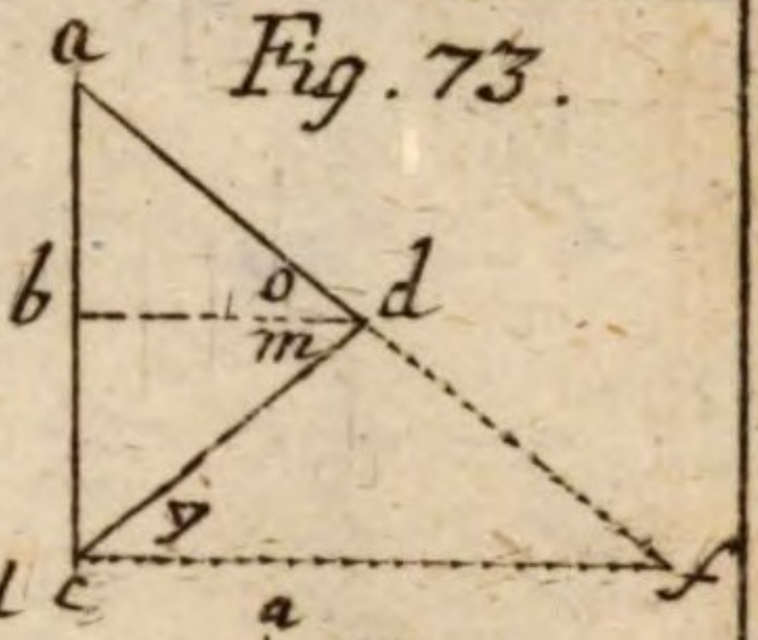


Fig. 75.

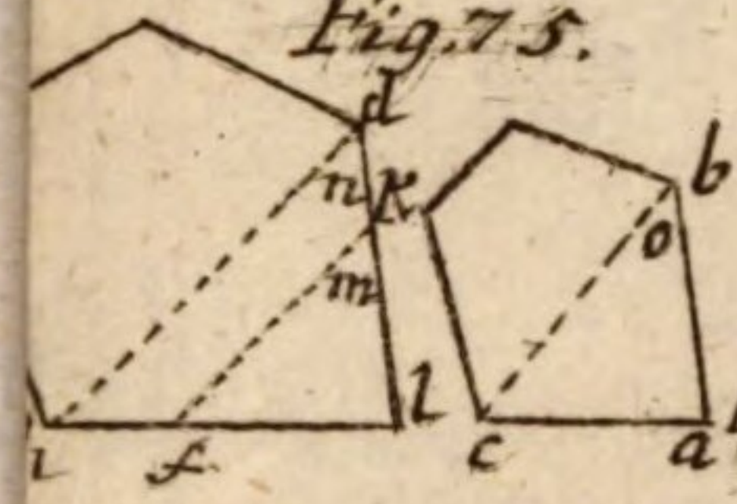


Fig. 76.

Fig. 78.

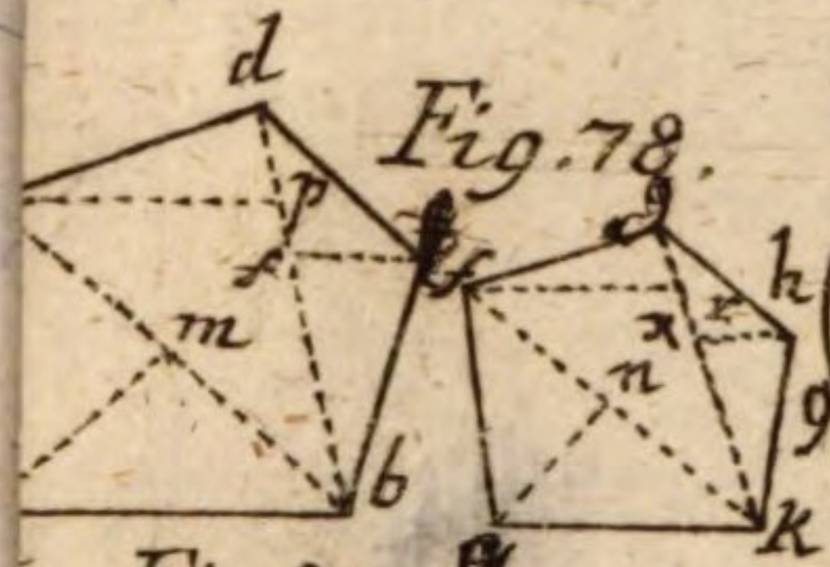


Fig. 79.

Fig 81

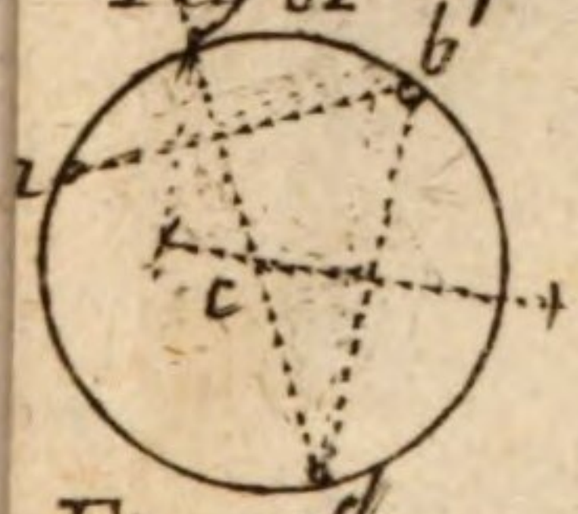


Fig. 82.

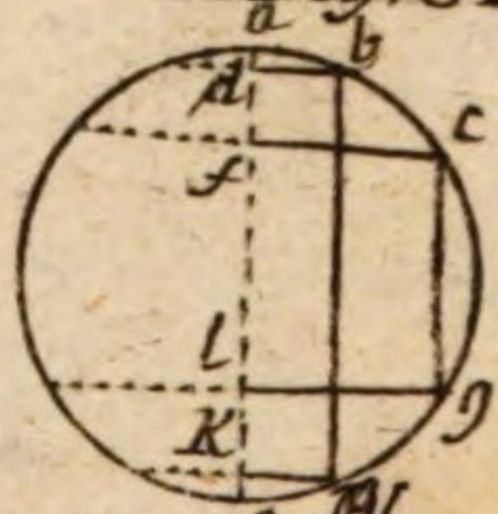


Fig. 84.

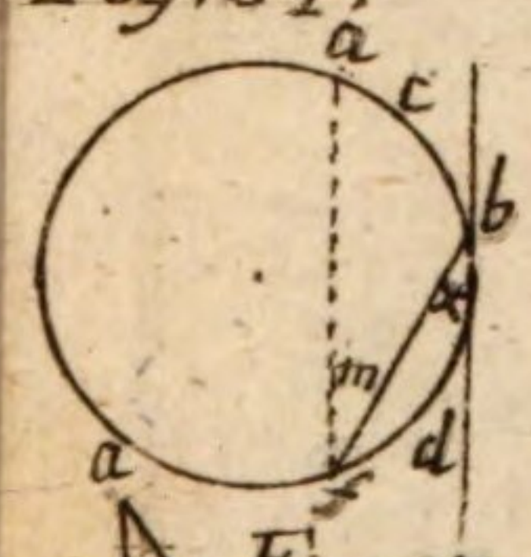


Fig. 85.

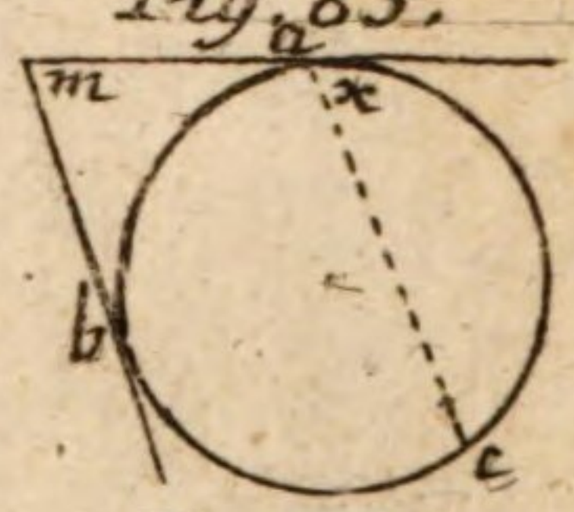


Fig. 87.

Fig. 88.

Fig. 90.

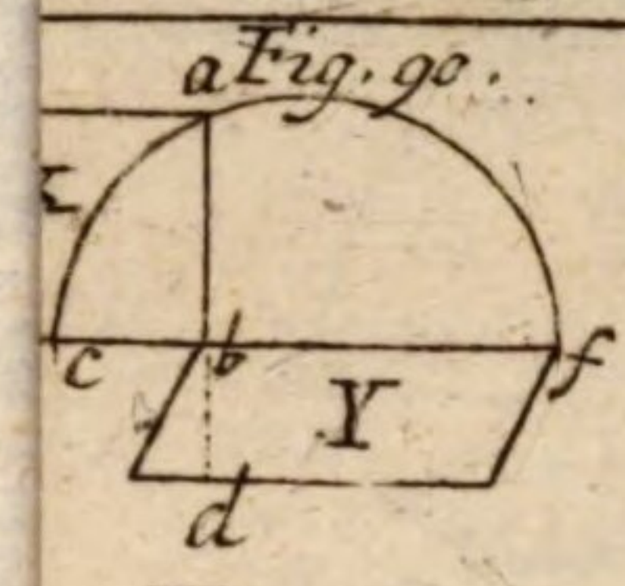


Fig. 91.

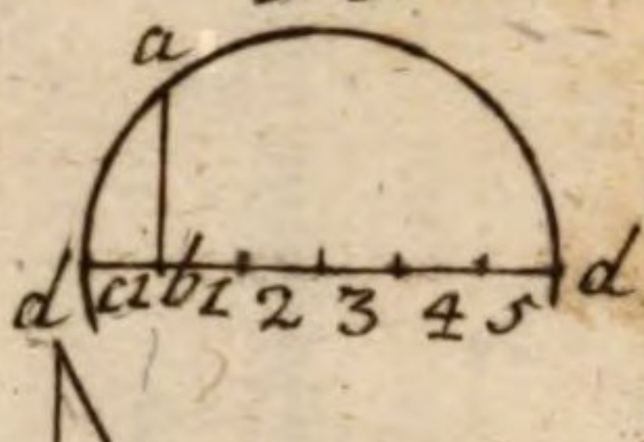


Fig. 93.

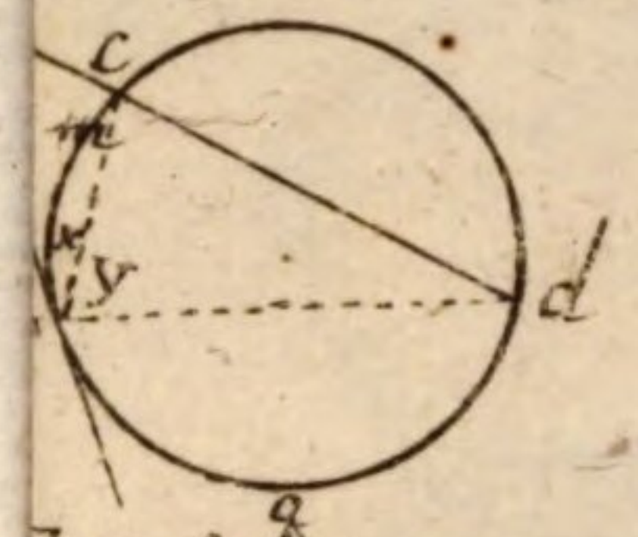


Fig. 94.

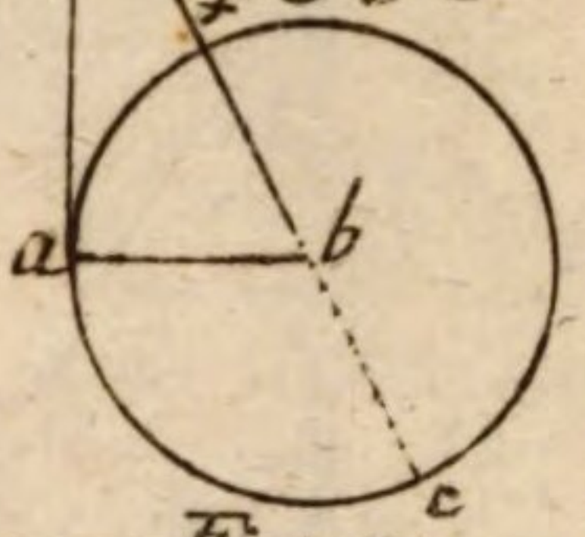


Fig. 96.

Fig. 97.

Fig. 99.

Fig. 100.

Fig. 102.

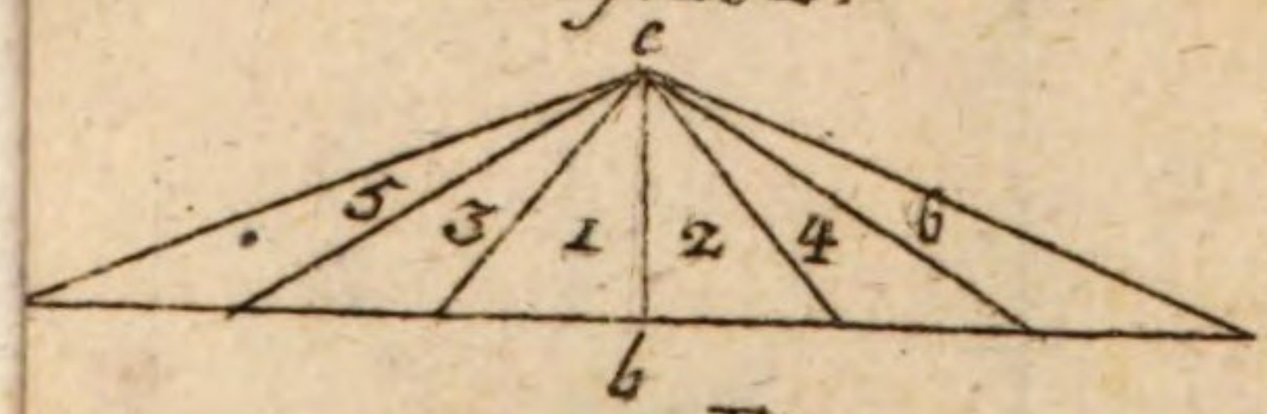


Fig. 104.

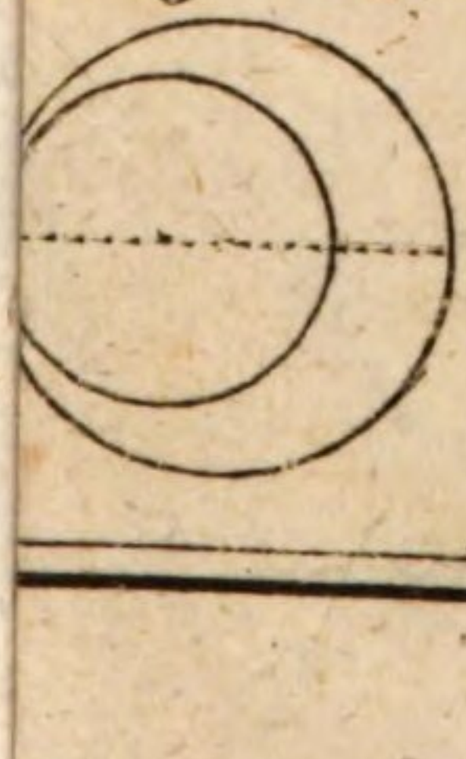


Fig. 105.

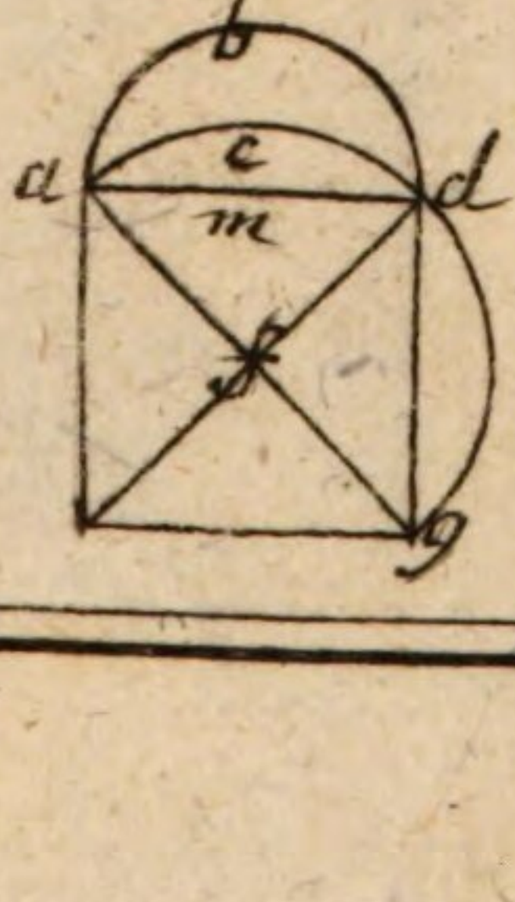


Fig 107

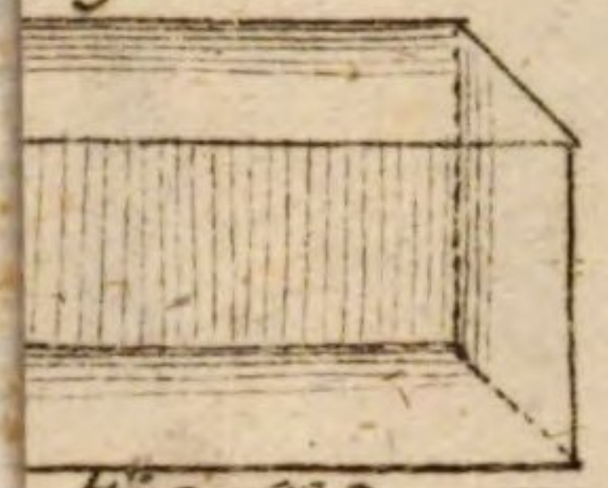


Fig 108

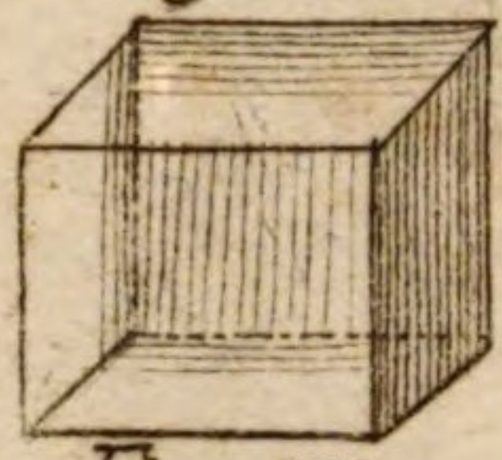


Fig. 110.

Fig. 111.

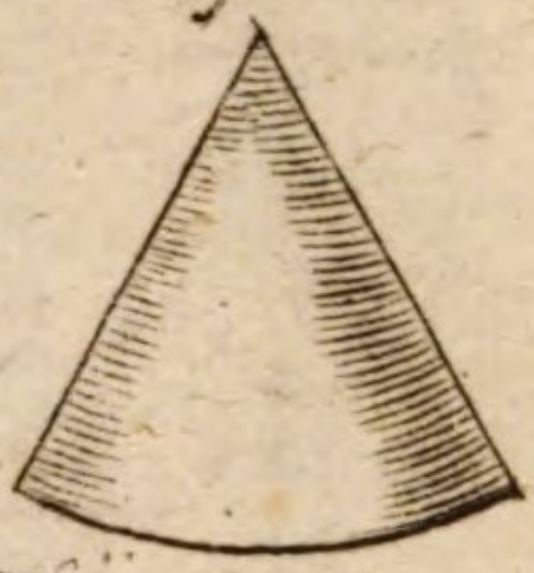


Fig. 113.

Fig. 115.

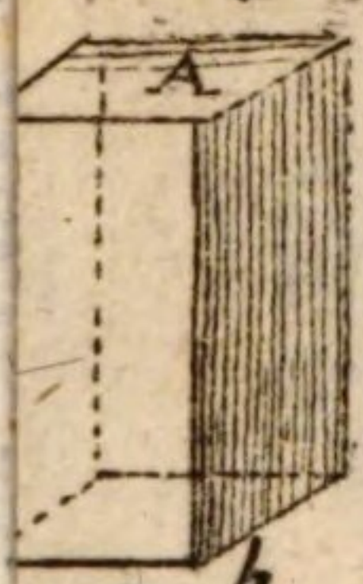


Fig. 117.

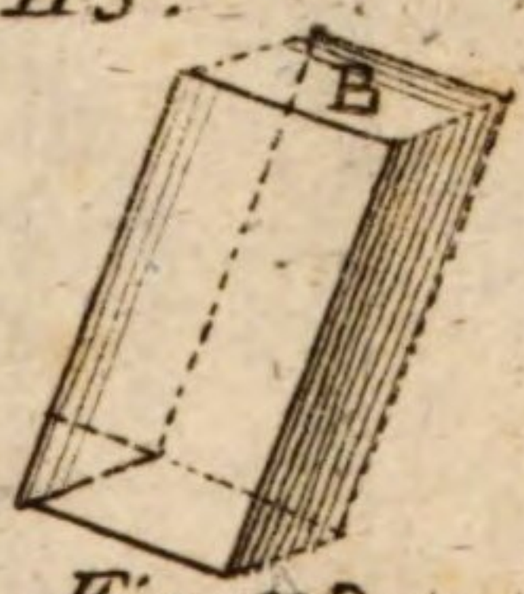


Fig. 118.

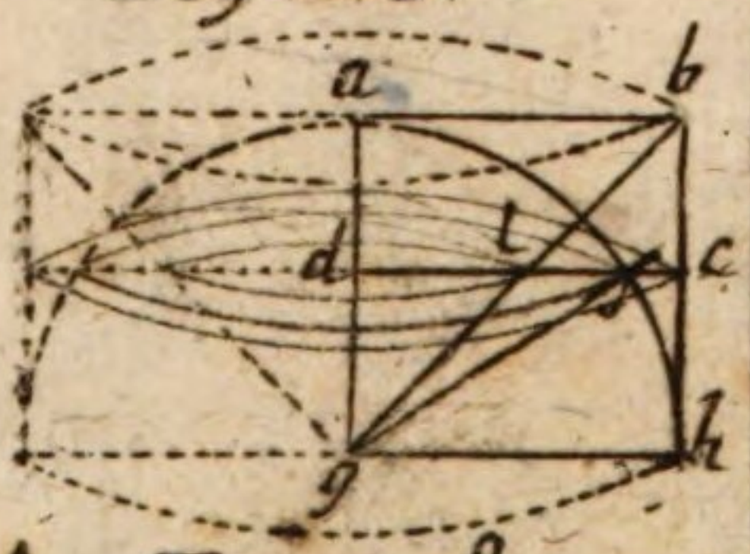


Fig. 121.

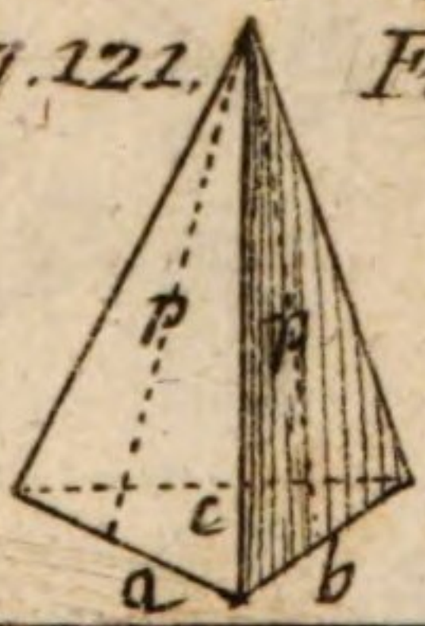
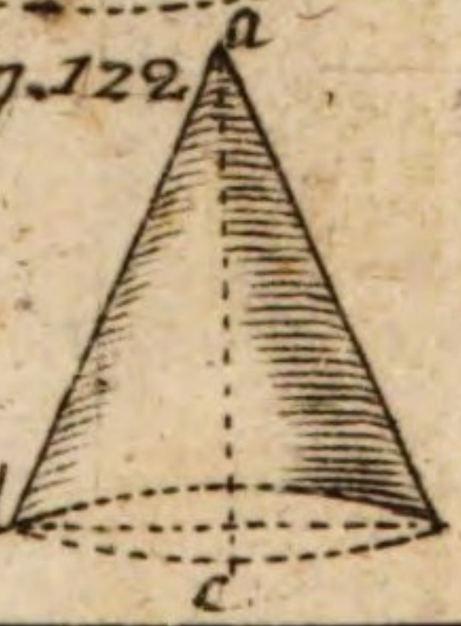


Fig. 122.



Weissenhahn sc.

Fig 125.

Fig. 126.

Fig. 129.

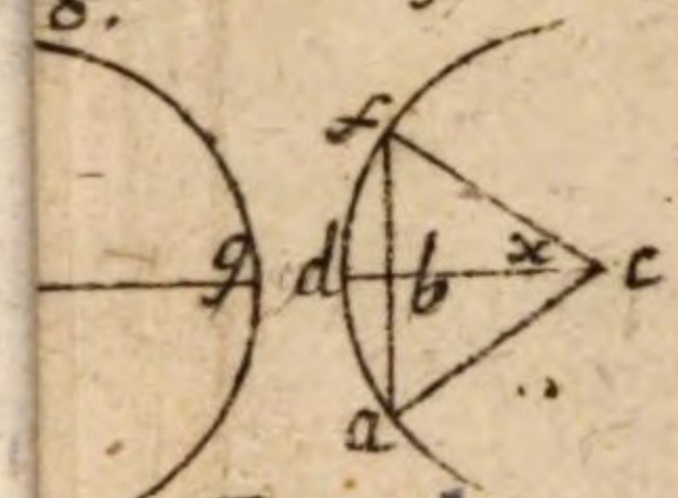


Fig. 130.

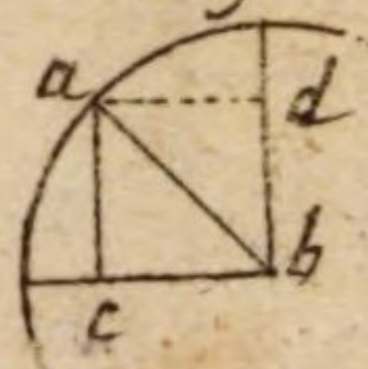


Fig. 133.

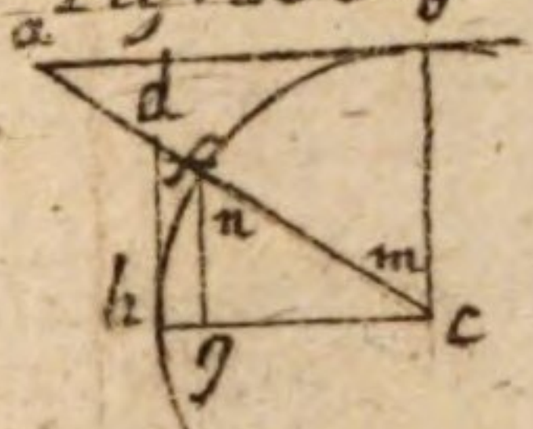


Fig. 134.

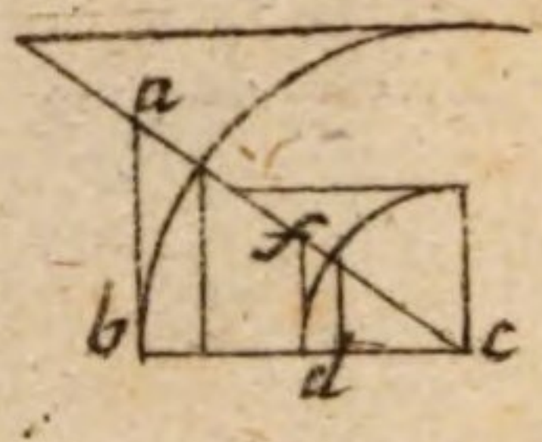


Fig. 136.

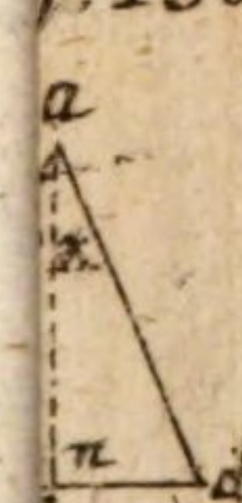


Fig. 137.

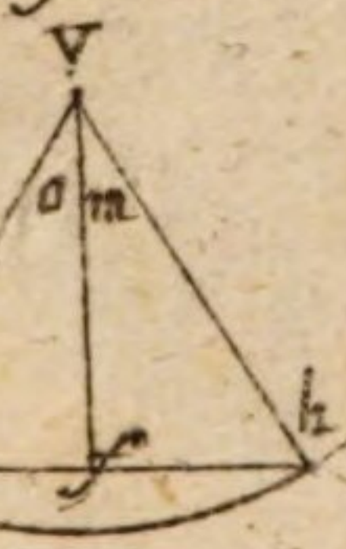


Fig. 138.

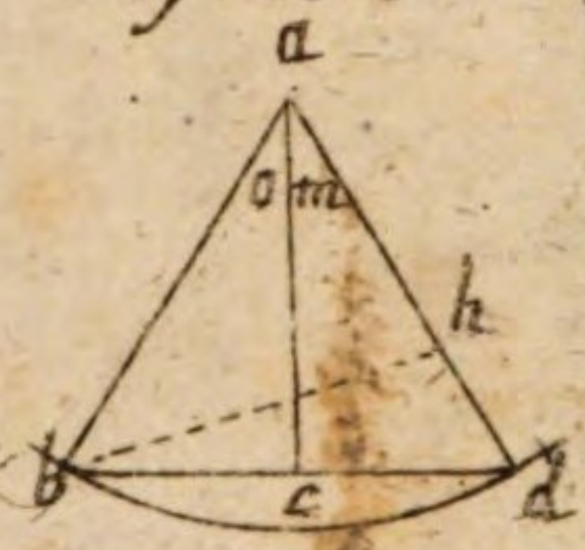


Fig. 142.

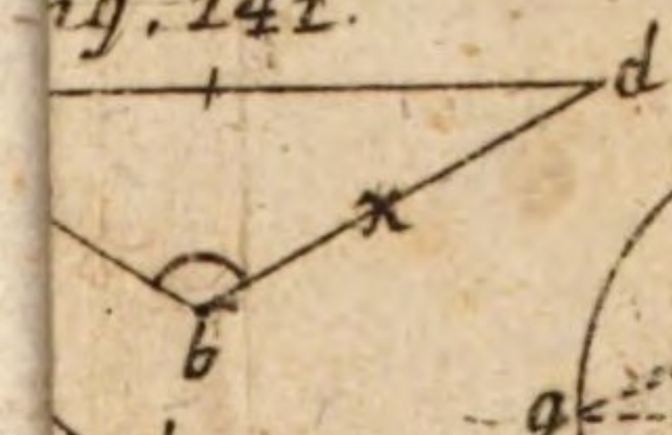
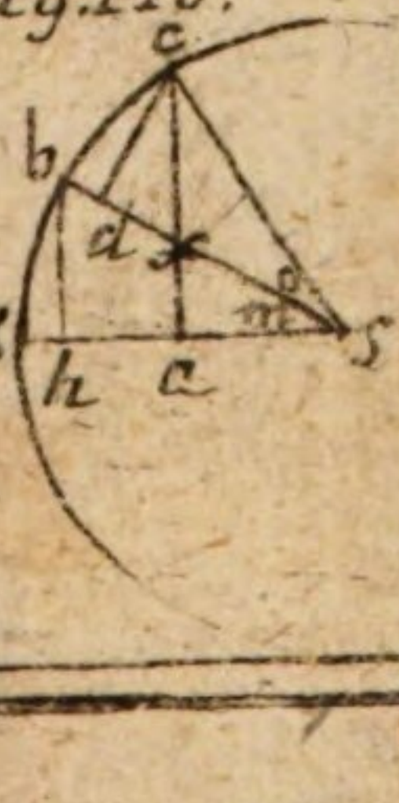


Fig. 144.

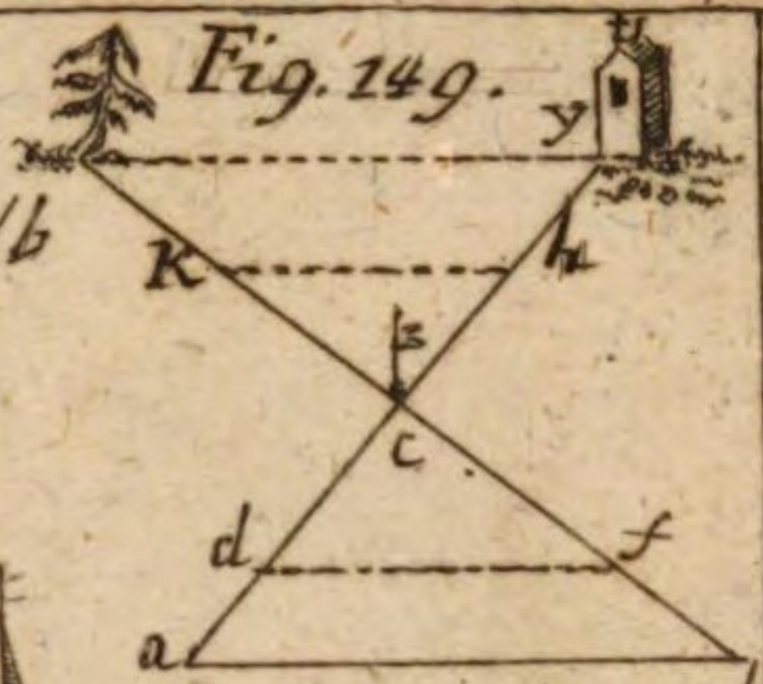
Fig. 145.

Fig. 146.



. 148.

Fig. 149.



g. 151.

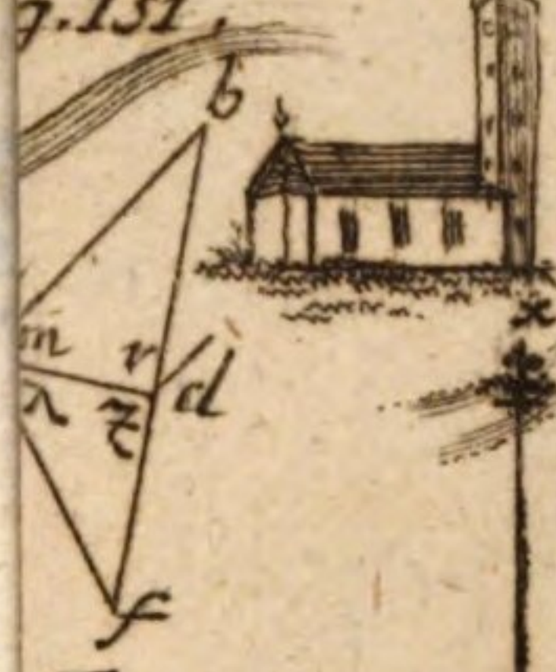


Fig. 152.

Fig. 154.

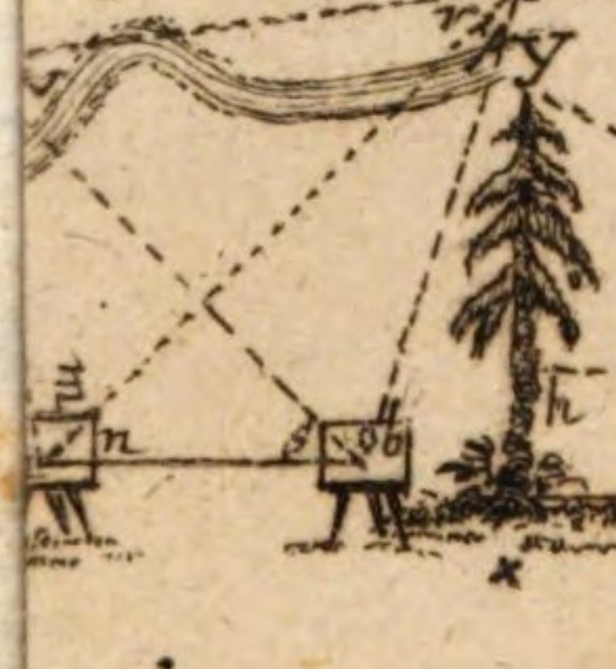


Fig. 155.

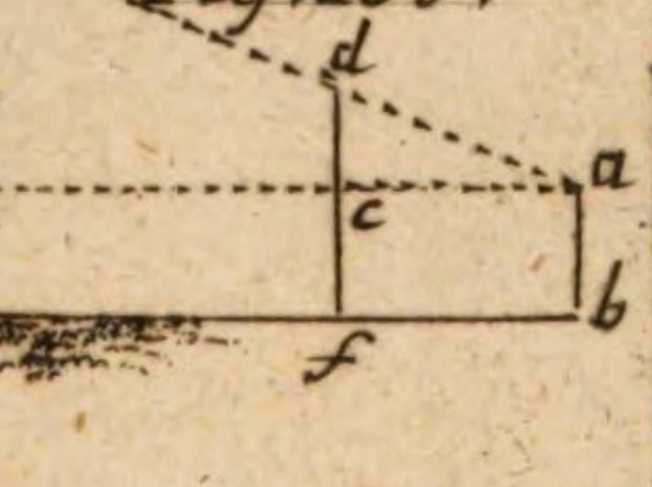


Fig. 157.

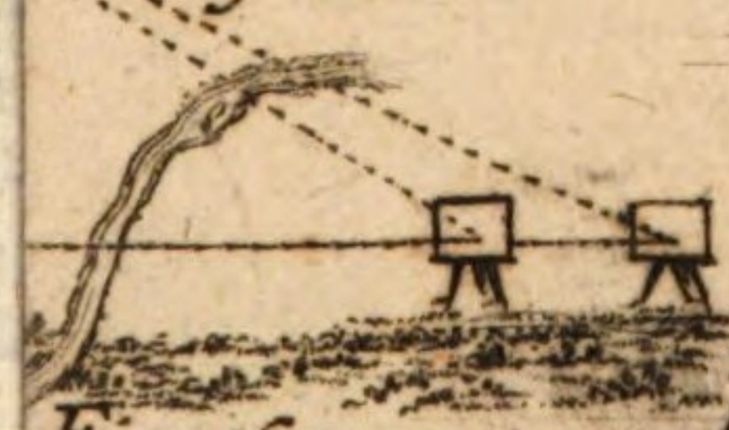


Fig. 158.

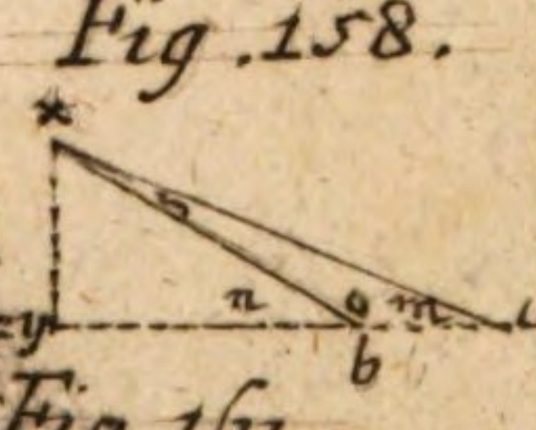
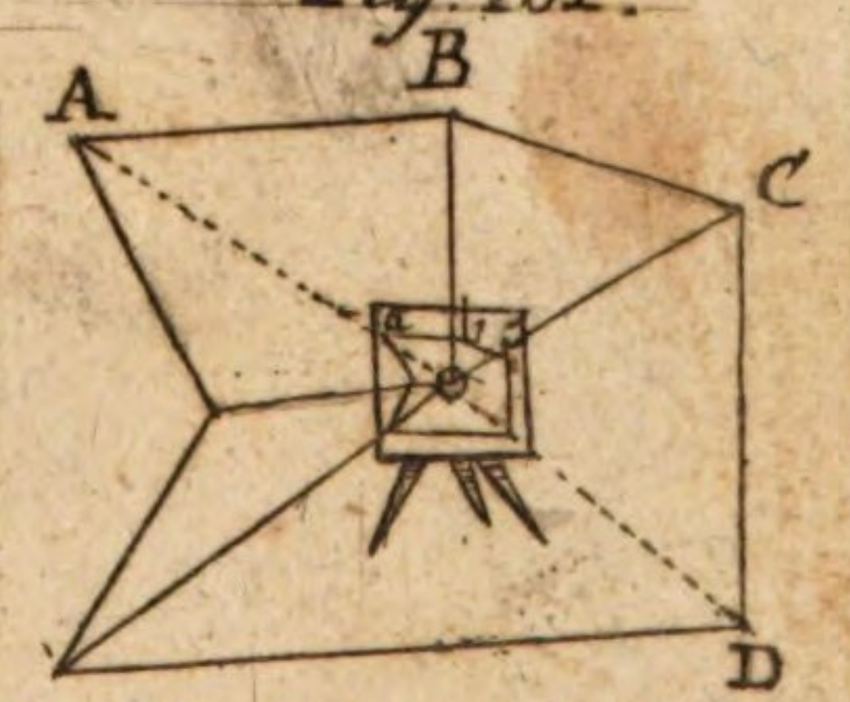


Fig. 160.

Fig. 161.



Johann Georg Prändels
öffentlichen Repetitors der Mathematik auf dem churfürstl. Schulhause zu München

Kugelreyeckslehre

und

höhere Mathematik

sammt

ihrer kleinen Geschichte.

Mit 4 Kupfertafeln.

München, 1793.
Bey Joseph Lentner.

Nro 1313.

Kugldreyeckslehre und höhere Mathematik. Von Joh. Georg Prändl, Repetitor.

Imprimatur.

München im churfürstl. Bücher-censur-Collegium, den 10ten August 1793.

Regist. Fol. 173.

F. X. Graff,
wirkl. Rath und Sekretär.

Vorrede.

Wie vielen und namhaften Schwierigkeiten die alltägliche Forderung unterworfen sey, in irgend einem Fache die schicklichste Mittelbahn zu treffen, liegt schon bey dem unbedeutensten Geschäfte zu hell am Tage, als daß so etwas erst von Bearbeitern mathematischer Lehrgebäude zum voraus erwähnt werden dörfte. Man soll sich, so viel möglich, auf Kürze befleißigen; und doch dabey weder Vollständigkeit des Systems, noch faßlichen Vortrag aus den Augen lassen. Reine Mathematik, heißt es ferner, muß immer das Gepräge der strengen Theorie ohne Anwendung behaupten; und doch dabey nicht in gar zu abstrakte Trockenheit verfallen. In der höhern Geometrie scheint zu Erlangung eines tiefern Blickes in die geheimen Verhältniße der Linien untereinander nichts

zuträg-

zuträglicher zu seyn, als die Eigenschaften der Kurven unmittelbar aus ihren Gesetzen kennen zu lernen; aber es darf dabey nicht vergeßen werden, den Anfängern der Analyse in dem hier, so zu reden, eigen dazu angewiesnem Felde zu zeigen, wie nun endlich von den Sätzen der Differential- und Integralrechnung überall häufiger Gebrauch gemacht werden könne; damit sie uns nicht mit gutem Fuge vorwerfen müssen, sie hätten sich der Erlernung derselben umsonst unterzogen. Schon die Beweisführungen für sich allein, sollen sie je den ohnehin schüchternen Kandidaten der Mathematik gleich beym ersten Anblick nicht vollends zurückschrecken, verlangen in präciser Form dargestellt zu werden; indeß sein ungeübter Verstand beym Durchstudieren nichts sehnlicher, als die umständlichste Auseinandersetzung aller Bestandtheile derselben erwartet. Ich beherzigte sie wohl diese drey Punkte, und hatte sie bey der Bearbeitung dieses Werkes stäts vor Augen: in wie fern sie Einfluß auf einen gewünschten Mittelweg hatten, erwarte ich von dem Ausspruche unpartheyischer Kenner.

Man

Vorrede.

Man mag mir etwa vorwerfen, ich hätte mich zu viel mit Anwendung der Differential- und Integralrechnung abgegeben. Aber wenn man bedenkt, daß dieß mit guter Absicht geschah, um nämlich fürs erste Gelegenheit zu geben, sich mehr in dem edelsten Zweige der Mathematik zu üben, welches bis daher in so wenigen Lehrbüchern noch geschehen ist; und zweytens, um auf doppeltem Wege zur Wahrheit zu gelangen, wodurch ebenfalls wieder die Richtigkeit der Rechnung des Unendlichen dargethan wird; so, denke ich, verliert der Einwurf viel, wo nicht das Meiste von seinem Gewichte. Indeß können die meisten derselben von jedermann, der weitläuftigen Kalkulierungen abholde ist, des Systemes unbeschadet, auch weggelassen werden.

Was ich in Hinsicht der allgebraischen Beweisarten, der Ordnung, der Geschichte, der Vollständigkeit, der Veranlassung zur Herausgabe, u. d. gl. noch zu sagen hätte, ist schon in der Vorrede zu meiner Elementargeometrie gemeldet worden, und braucht also dießmal keiner Erwähnung mehr.

Ich

Vorrede.

Ich schmeichle mir, daß man manches Neue in selben finden wird, und daß das Werk durchgehends nach eignem Zuschnitte, vorzüglich in Rücksicht der vielen Beyspiele, die ich alle selbst entworfen, und sehr mühsam durchrechnete, bearbeitet worden. Freunde der guten Sache werden meine Arbeit gewiß nicht mißkennen, und habe ich einmal den Beyfall von dieser bessern und edleren Menschenklasse, o dann gebe ich mich gerne zufrieden, und bin taub zu dem Gekrächze der übrigen misantropischen Rabengeschöpfe.

Schriebs

München den 3ten August 1793.

Der Verfasser.

Ueber-

Ueberblick
der in diesem Bande abgehandelten Materien.

Kugldreyeckslehre.

	Seite
1) Vorbegriffe	I
2) Nähere Sätze zur Berechnung der Kugldreyecke, und zwar der rechtwinklichten	IV
3) Von schiefwinklichten Kugldreyecken . . .	XII
4) Eine abgezogene Anweisung aus den gegebenen geographischen Längen und Breiten zwoer Oerter, ihre Entfernung von einander zu finden . . .	XXII

Höhere Mathematik.

1) Von veränderlichen und beständigen Größen, und von den Funktionen	2
2) Vorbegriffe vom Unendlich-Großen und Kleinen .	5
3) Differentialrechnung	10
3) Etwas vom größten und kleinsten Werthe der Funktionen, als eine vorläufige Anwendung der Differentialrechnung	20
Integralrechnung	25
Einige vorläufige Anwendungen der Integralrechnung	30

Seite

Höhere Geometrie.

Vorbegriffe der nothwendigsten Hilfslinien . . . 40

Von Kegelschnitten 44

Von der Parabel 44

Von der Ellipse 80

Von der Hyperbel 136

Von der Logistik oder der logarithmischen Linie . . 171

Von der umgekehrten Methode der Tangenten . . 185

Geschichte der Kugeldreyecklehre 191

Geschichte der höhern Mathematik 194

Kugeldreyeckslehre.

Vorbegriffe.

§. 1. Erklärung.

Sie ist die Wissenschaft, aus drey gegebnen Theilen eines Kugeldreyecks die übrigen durch Rechnung zu bestimmen.

§. 2. Erkl. Ein Kugeldreyeck ist ein von drey Bögen gröster Zirkel auf der Oberfläche der Kugel eingeschloßner Raum.

§. 3. Zusatz. Diese Lehre unterscheidet sich von der ebnen Trigonometrie dadurch, daß die Dreyecke in keiner Ebne, sondern auf der Kugelfläche liegen, und daß die gegebnen Stücke auch drey Winkel seyn können.

§. 4. Zusatz. Daß die Seiten eines solchen Kugeldreyecks Bögen gröster Zirkel seyn müssen, die einerley Diameter haben, wird daraus begreiflich, weil nur in diesem Falle eine Vergleichung der trigonometrischen Linien statt haben kann.

§. 5. **Lehrsatz.** Jeder gröste Zirkel theilt die Kugel in zween gleiche Theile.

Beweis. Es ist in der Geometrie erwiesen, daß jede gerade Linie, die durch den Mittelpunkt eines Zirkels geht, denselben in zween gleiche Theile theile; was dort von Linien gilt, das gilt bey Körpern von ihren abstammenden Flächen; nun die Fläche eines grösten Zirkels geht durch den Mittelpunkt der Kugel, also theilt er sie in zween gleiche Theile.

§. 6. **Lehrsatz.** Zween gröste Zirkel theilen sich in gleiche Theile.

Beweis. Erwiesen ist, daß sich zwo gröste Sehnen eines Planzirkels in zween gleiche Theile theilen. Man kann sich aber diese Sehnen als Durchmesser neuer Zirkel vorstellen, die in was immer für einer Richtung durch die Ebne gelegt sind; folglich müssen sich auch diese sowohl in Rücksicht der Peripherien, als der Flächen halbieren.

§. 7. **Zusatz.** Wenn sich nun zwo schneidende gröste Kugelflächen im Mittelpunkte der Kugel begegnen, so entsteht eine Neigung wovon die Bögen die Gränzen sind. Diese Flächenneigung nun oder Bögenneigung heißt ein sphärischer Winkel.

§. 8. **Lehrsatz.** Wenn die Schenkel eines sphärischen Winkels bis zu jenem Vertikalbogen fortgeführt werden, der 90° vom Winkel entfernt ist, so bestimmt dieser abgeschnittne Bogen das Maas des Winkels.

Satz. Fig. 1

df = ●

Beweis.

Beweis.

dcf = df denn dieser Bogen ist aus dem Scheitelpunkte beschrieben.

aber dcf = o wegen einerley Neigung

also df = o

§. 9. **Erkl.** Der Pol eines Zirkels heißt jener Punkt auf der Kugel, welcher auf allen Seiten vom Zirkel gleich weit, oder 90° entfernt ist, weil hier nur von grösten Zirkeln die Rede ist.

§. 10. **Zusatz.** Da auf der entgegengesetzten Seite der Kugel auch ein solcher Punkt möglich ist, so hat jeder gröste Zirkel zween Pole.

§. 11. **Zusatz.** Die gerade Linie von einem Pole zum andern muß nothwendig ein Diameter der Kugel seyn; weil sie 180° von einander entfernt sind.

§. 12. **Lehrsatz.** Ein Zirkel, der durch die Pole eines andern geht, durchschneidet ihn perpendikulär.

Beweis. Die Flächenneigungen sind aus der Bedingung des Pols §. 9 beyderseits einander gleich, und zwar 90°, also schneidet ein solcher Zirkel den andern unter einem rechten Winkel, das ist perpendikulär.

§. 13. **Lehrsatz.** Die sphärischen Nebenwinkel machen zusamm 180°, und die Vertikalwinkel sind gleich.

Beweis. Die sphärischen Winkel kommen mit den Neigungsflächen ihrer Zirkel überein;

für diese nun gelten die Beweise der Planimetrie, also auch für jene.

§. 14. **Erkl.** Es giebt zweyerley Kugeldreyecke. Rechtwinklichte und schiefwinklichte. Von der ersten Gattung sind sie, wenn sich ein oder mehrere rechte Winkel darin vorfinden, im widrigen Falle gehören sie zur andern Gattung. Die Benennungen der Seiten in rechtwinklichten Dreyecken ist die nämliche wie bey Ebnen. Wenn die Lothen oder Perpendikel beyde entweder mehr oder weniger als 90° halten, so heissen sie gleichartig.

§. 15. **Lehrsatz.** Es kann keine Seite 180°, oder darüber halten.

Beweis. Die Seiten sind Bögen gröster Zirkel. Diese schneiden sich in ihrer Mitte, das ist in einer Entfernung von 180° §. 6. Schneidet nun ein dritter Bogen, wo, und wie er will die zween Halbbögen zu einem Kugeldreyecke, so giebt es Theile von selben; also kann nirgend ein Halbzirkel die Seite zu sphärischen Dreyecken werden.

Nähere Sätze zur Berechnung der Kugeldreyecke und zwar der rechtwinklichten.

§. 16. **Erkl.** Man kann in einem rechtwinklichten Dreyecke, mit Wolfen mittlere, anliegende und abgesönderte Theile betrachten. Mittlere Theile sind die, welche lediglich zwischen zwey andern Theilen liegen. Diese Theile, zwischen welchen sich der mittlere Theil befindet, heissen die anliegenden. Was aber weder ein mittlerer Theil, noch ein anliegender heissen kann, dieß nennt man abgeson-

gesonderte; wo der rechte Winkel nie darunter gezählt werden darf. Wenn schiefwinklichte Dreyecke durch einen Perpendikel in zwey rechtwinklichte zerfällt werden, so läßt sich auch dort diese Eintheilung anbringen. In jedem rechtwinklichten Dreyecke giebt es fünf Fälle, wenn nämlich jedesmal ein anders von den fünf Stücken, — den der rechte Winkel ist abgerechnet, — als mittlerer Theil betrachtet wird. Z. B. Fig. 2

Mittlere.	Anliegende.	Abgesönderte.
1) a b	a c , b	b c , c
2) b	a b , b c	a c , c
3) b c	b , c	a b , a c
4) c	b c , a c	b , a b
5) a c	c a b	b c , b

§. 17. **Lehrsatz.** In jedem rechtwinklichten Kugeldreyecke verhält sich der Radius zum Sinus der Hypothenuse, als wie der Sinus eines schiefen Winkels zum Sinus der überstehenden Seite.

Satz. Fig. 3

$$r : \sin a d = \sin d : \sin a f$$

Beweis.

Man ziehe die gehörigen Linien, so werden sie ein rechtwinklichtes ebnes Dreyeck vorstellen, worinn

$$\sin b : a c = \sin m : a b$$

subst. $$r : \sin a d = \sin d : \sin a f$$

§. 18. **Anmerk.** Der Beweis läßt sich noch anders führen, aber dieser däucht mir der kürzeste und natürlichste zu seyn.

§. 19. **Anmerk.** Kraft dieses Lehrsatzes wären wir wirklich schon im Stande so manche Aufgabe zu lösen: doch brauchen wir ihn hier nur zur Einleitung zweyer Hauptregeln, nach welchen alle Fälle berechnet werden können.

§. 20. **Lehrsatz.** **Wenn man mit Wolfen die Komplemente der Perpendikel für die Perpendikel selbst setzt, so gleicht allemal das Produkt aus dem Radius in den Kosinus des mittleren Theils dem Produkte der Sinusse der abgesonderten Theile. Der Fall ist dreyfach: 1) Wenn die Hypothenuse 2) einer von den Perpendikeln 3) ein schiefer Winkel der mittlere Theil ist**

I Satz. Fig. 4

r X cos a c = sin c d X sin b g

Beweis.

Man ergänze die Bögen zu Quadranten, so geben die Komplemente ein neues rechtwinklichtes Dreyeck ab, weil a der Pol des Quadranten d g folglich des ganzen Zirkels ist, wo sich für die Winkel bey g und f keine andere Maase als die Entfernung vom Pol bis zum Zirkel, das ist, Quadranten beschreiben lassen. Es ist demnach in dem Dreyeck c d f

sin f : sin d c = sin d : sin c f
oder r : sin d c = sin b g : cos a c
r X cos a c = sin c d X sin b g

III Satz.

$r \times \cos bg = \sin ac \times \sin c$

Beweis.

In dem Dreyecke abc selbst ist

$$\sin b : \sin ac = \sin c : \sin ab$$

oder

$$r : \sin ac = \sin c : \cos bg$$

$$r \times \cos bg = \sin ac \times \sin c$$

III Satz.

$r \times \cos a = \sin c \times \sin de$

Beweis.

Es sey alles wie vorhin, so ist

$$\sin o : \sin df = \sin f : \sin de$$

oder

$$\sin c : \cos a = r : \sin dc$$

$$r \times \cos a = \sin c \times \sin dc$$

§. 21. Zusatz. Weil jeder Theil des Dreyecks — ausser dem rechten Winkel — ein mittlerer Theil seyn kann, so giebt dieser Lehrsatz 5 Gleichungen. Sie heissen

1) $r \times \cos ac = \sin ab \times \sin bc$
2) $r \times \cos ab = \sin ac \times \sin c$
3) $r \times \cos bc = \sin a \times \sin ac$
4) $r \times \cos a = \sin c \times \sin bc$
5) $r \times \cos c = \sin a \times \sin ab$

weil ferner in jeder Gleichung ein jedes der dreyen Glieder unbekannt seyn kann, so läßt sich auch jede Gleichung auf 3 Fälle nutzen, welches in allem 15 Fälle giebt. Ein fruchtbarer Lehrsatz!

§. 22.

§. 22. **Anmerk.** Eine kleine Anwendung auf die gemeine Astronomie soll diese Fälle in etwas erläutern. Es ist bekannt daß der Aequator, die Ekliptik und der Meridian gröste Zirkel der Weltkugel sind. Weil nun der Meridian überall durch den Pol des Aequators beschrieben wird, so schneidet er diesen rechtwinklicht. Der Winkel, welchen der Aequator mit der Ekliptik macht, heißt die Schiefe der Ekliptik; ein Stück oder Bogen des Aequators zwischen der Schiefe und einem Meridian heißt die Rectascension der Sonne, oder die gerade Auffsteigung; der Bogen der Ekliptik zwischen der Schiefe und dem Meridian, giebt den Ort der Sonne, oder ihre Vorrückung, der Bogen des Meridians zwischen der Ekliptik und dem Aequator ist die Deklination der Sonne, und der zweyte schiefe Winkel wird der Meridianwinkel genennt. In unsrer 4ten Figur dörfte c die Schiefe, b c die Rectascension, a b die Deklination, a den Meridianwinkel, und a c den Ort der Sonne vorstellen.

§. 23. **Aufgabe.** Es sey die Declination der Sonne 12°33′, wie weit ist selbe in der Ekliptik bereits vorgerückt?

Auflösung. Weil die Schiefe der Ekliptik schon als bekannt vorausgesetzt wird, und 23°29′ beträgt, so nehme man die Deklination als einen mittleren Theil an, und dann werden die Vorrückung und die Schiefe abgesonderte Theile seyn.

$$r \times \sin a\,b = \sin a\,c \times \sin c$$

$$\frac{r \times \sin a\,b = \sin a\,c}{\sin c}$$

$$\begin{aligned} \text{Log } r + \sin a\,b &= 19{,}3364749 \\ \text{Log } \sin c \quad & \underline{\quad 9{,}6004090} \\ 9\,7360659 &= \text{Log } \sin 33^\circ \end{aligned}$$

§. 24. **Anmerk.** Ich habe deßwegen *sin a b* gesetzt, weil a b ein Perpendikel ist; folglich sein Komplement dafür genommen wird. Der Kosinus des Komplements aber ist nichts anders als der Sinus des Perpendikels.

§. 25. **Lehrsatz.** In jedem rechtwinklichten Kugeldreyecke verhält sich die Tangente eines Winkels zum Radius; wie die Tangente des überstehenden Perpendikels zum Sinus des andern Perpendikels.

Satz. Fig. 5

tang b : r = tang g d : sin d b

Beweis.

Die △ k c h ∽ △ f a d wegen rechten, und gleichen Neigungswinkeln

also k h : h c = f d : d a

subst. tang b : r = tang g d : sin d b

§. 26. **Lehrsatz.** Das Produkt aus dem Radius in den Sinus eines Perpendikels ist gleich dem Produkt aus der Tangente des andern Perpendikels in die Kotangente des überstehenden Winkels.

Satz. Fig. 5

r × sin d b = tang g d × cot b

Beweis.

tang b : r = tang g d : sin d b

aber tang b : r = r : cot b §. 30 eb. Trig.

r : cot b = tang g d : sin d b

r × sin db = tang g d × cot b

§. 27. **Anmerk.** Beyde Beweise und Lehrsätze hätten wegbleiben, und in den Beweis des folgenden Lehrsatzes mit unter gewebt werden können; aber ich wollte sie gefliissentlich aussetzen, theils die Beweise abzukürzen, theils mehrere Formeln zu tieferen Spekulationen zu gewinnen.

§. 28. **Lehrsatz.** Wenn man mehrmal mit Wolfen für die Perpendikel ihre Komplemente nimmt, so ist allemal in rechtwinklichten Kugeldreyecken das Produkt aus dem Radius in dem Kosin des mittleren Theils gleich dem Produkt

der

der Kotangenten der anliegenden Theile. Der Fall ist ebenfalls dreyfach: 1) Wenn ein Schenkel 2) ein Winkel 3) die Hypothenuse ein mittlerer Theil ist.

I Satz Fig. 4

$$r \times \text{cof}\, c\, d = \cot c \times \cot b\, g$$

Beweis.

In dem Dreyecke a b c ist nach §. 26

$$r \times \text{fin}\, b\, c = \cot c \times \text{tang}\, a\, b$$

subst. $r \times \text{cof}\, c\, d = \cot c \times \cot b\, g$

II Satz.

$$r \times \text{cof}\, a = \cot a\, c \times \cot b\, g$$

Beweis.

Im Dreyeck der Komplimentsbögen ist

$$r \times \text{fin}\, d\, f = \text{tang}\, c\, f \times \cot d \quad \text{§. 26}$$

oder $r \times \text{cof}\, a = \cot a\, c \times \cot b\, g$

III Satz.

$$r \times \text{cof}\, a\, c = \cot a \times \cot e$$

Beweis.

Es ist wieder in dem Dreyeck der Komplementsbögen

$$r \times \text{fin}\, c\, f = \text{tang}\, d\, f \times \cot c$$

oder $r \times \text{cof}\, a\, c = \cot a \times \cot c$

§. 29. Zusatz. Aus diesem Lehrsatze können wiederum 5 Gleichungen, und in allem wie oben 15 Fälle abgeleitet werden. Z. B.

1) r X cos a c = cot a X cot c
2) r X cos b c = cot c X cot a b
3) r X cos a b = cot a X cot b c
4) r X cos a = cot a b X cot a c
5) r X cos c = cot a c X cot b c

§. 30. Zusatz. Beyde Universalregeln lassen sich in diesen einzigen Ausdruck zusamm ziehen: Das Produkt aus dem Radius in den Kosinus des mittleren Theils ist gleich dem Produkt, entweder aus den Kotangenten der anliegenden, oder aus den Sinussen der abgesonderten Theile.

§. 31. Aufgabe. Die gerade Aufsteigung beträgt 39°22′, wie groß ist die Deklination der Sonne?

Auflösung. Weil die gerade Aufsteigung Fig. 4 der mittlere Theil = b c, die beyden anliegenden aber die Schiefe der Ekliptik = c, und die Deklination = a b = x ist, so ist die Gleichung logarithmisch ausgedrückt

Log sin tot + Log sin b c = Log cot c + Log tang x
Log sin tot + Log sin 39°22′ = Log cot 23°29′ + Log tang x

Log sin tot = 10,0000000
Log sin 39°22′ = 9,8022816

19,8022816
Log cot 23°,29′ 10,3620437

9,4402379 = Log tang x

welcher Tangente ein Bogen von 16°24′ zugehört, und hier die Größe der Deklination angiebt.

§. 32.

§. 32. **Anmerk.** Da b c und x Perpendikel sind, und Kosinus und Kotangente der Komplementsbogen, die hier genommen werden müssen, nichts anders als Sinus und Tangens der wahren Bögen vorstellen, so sind sin b c und Tang x rechtmäßige Ausdrücke in obiger Gleichung.

§. 33. **Anmerk.** Auf diese Art lassen sich alle Aufgaben die in rechtwinklichten Dreyecken vorkommen können, auflösen.

Von schiefwinklichten Kugeldreyecken.

§. 34. **Erkl.** Ein schiefwinklichtes Kugeldreyeck wird in zwey rechtwinklichte zerfällt, wenn aus einem der Winkel auf die gegenüberstehende Seite ein Perpendikel, das ist, ein Vertikalbogen herabgefällt wird, wo auch manchmal die Seite verlängert werden muß.

§. 35. **Zusatz.** Es lassen sich also durchaus die beyden oben gegebnen Regeln, die wir auch endlich §. 30 in eine einzige zusamm gezogen haben, bey schiefwinklichten Dreyecken ebenfalls anwenden. Es kömmt alles dabey auf die geschickteste Art an, mit der man zu Werke geht.

§. 36. **Aufgaben.** 1) Aus Winkeln und Seiten, die einander entgegen stehen, ein viertes Stück zu finden. 2) Aus einer Seite und den darauf liegenden Winkeln; 3) aus einem Winkel und den einschliessenden Seiten; 4) aus allen drey Seiten; 5) aus allen 3 Winkeln, das übrige zu finden.

Auflösung des ersten Falles. Kürze halber nutze man hier den Lehrsatz: Die Sinusse der Seiten stehen mit den Sinussen der ihnen entgegen-

stehenden Winkeln in Verhältniß, welchen Satz wir auch zum Ueberfluße, besonders bey schiefwinklichten Dreyecken erweisen wollen.

Satz. Fig. 6

$$\sin a\,b : \sin b\,c = \sin c : \sin a$$

Beweis.

Man sönd̈ere die beyden Seiten durch einen Perpendikel von einander ab, so ist

1) $\sin a : \sin b\,d = r : \sin a\,b$

$$\sin b\,d = \frac{\sin a \times \sin a\,b}{r}$$

2) $\sin c : \sin b\,d = r : \sin b\,c$

$$\sin b\,d = \frac{\sin c \times \sin b\,c}{r}$$

Nun ist also

$$\frac{\sin a \times \sin a\,b}{r} = \frac{\sin c \times \sin b\,c}{r}$$

$\times r$

$$\sin a \times \sin a\,b = \sin c \times \sin b\,c$$

oder in einer Proportion

$$\sin a\,b : \sin b\,c = \sin c : \sin a$$

Zweyter Fall. Wenn eine Seite und die darauf liegenden Winkel gegeben sind. Z. B. es sey Fig. 6 A, b und c gegeben.

Auflösung. Man fälle aus einem den Perpendikel auf die Gegenseite, so entstehen 2 Dreyecke mit rechten Winkeln, woraus sich nach und nach gemäß der obigen Universalregel, und dem ersten Falle alles finden läßt. Denn es ist

1) $r \times \text{cof}\, A = \cot c \times \cot o$ §. 30.

$$\frac{r \times \text{cof}\, A}{\cot c} = \cot o$$

Wird o von b abgezogen, so hat man auch x

2) $r \times \text{cof}\, o = \cot A \times \text{tang}\, P$

$$\frac{r \times \text{cof}\, o}{\cot A} = \text{tang}\, P$$

3) $r \times \text{cof}\, x = \text{tang}\, P \times \cot C$

$$\frac{r \times \text{cof}\, x}{\text{tang}\, P} = \cot C$$

4) $\text{fin}\, c : \text{fin}\, C = \text{fin}\, b : \text{fin}\, B$

$$\frac{\text{fin}\, C \times \text{fin}\, b}{\text{fin}\, c} = \text{fin}\, B$$

5) $\text{fin}\, c : \text{fin}\, C = \text{fin}\, a : \text{fin}\, A$

$$\frac{\text{fin}\, c \times \text{fin}\, A}{\text{fin}\, C} = \text{fin}\, a$$

§. 37. **Anmerk.** Man sieht hieraus, daß es auch andere Wege geben könne, wo durch die nämliche Regel die Stücke nach und nach gefunden werden. Die Uebung wird am Ende von selbst den kürzesten zeigen.

Dritter Fall. Wenn zwo Seiten sammt den eingeschlossenen Winkel gegeben sind. Z. B. es sey Fig. 7 bekannt A, B und c.

Auflösung. Es werde auf eine der gegebnen Seiten vom Gegenwinkel aus ein Perpendikel gefällt, so ist, wenn das größere Segment x heißt

1) $r \times \text{cof}\, c = \cot A \times \text{tang}\, x$

$$\frac{r \times \text{cof}\, c}{\cot A} = \text{tang}\, x$$

Dieß abgezogen von B giebt das Stück $B - x$

2)

2) $r \times \sin x = \cot c \times \operatorname{tang} P$

$$\frac{r \times \sin x}{\cot c} = \operatorname{tang} P$$

3) $r \times \sin (B - x) = \cot a \times \operatorname{tang} P$

$$\frac{r \times \sin (B - x)}{\operatorname{tang} P} = \cot a$$

4) $\sin a : \sin A = \sin c : \sin C$

$$\frac{\sin A \times \sin c}{\sin a} = \sin C$$

5) $\sin c : \sin C = \sin b : \sin B$

$$\frac{\sin c \times \sin B}{\sin C} = \sin b$$

§. 38. **Anmerk.** Ich kann nicht umhin, bevor ich zu dem 4ten Fall schreite, von dem eben aufgelösten ein kleines Feld zur Anwendung zu eröffnen.

§. 39. **Aufgabe.** Aus den geographischen Breiten und Längen zweyer Oerter auf der Erde ihre Entfernung zu finden.

Auflösung. Man weis, daß die zween Meridianbögen, worauf die Breiten bestimmt werden, im Pol einen Winkel bilden, der die Differenz ihrer Längen zum Maase hat. Wenn man sich nun von einem Orte zum andern einen Bogen des grösten Zirkels einbildet, so ist dieser die Entfernung; welche, wenn selbe in Graden gefunden worden, leicht in Meilen zu verwandeln. Es stelle Fig. 8 c den Pol vor, so ist A das Komplement der einen Breite, und B das Kompleiment der andern Breite. Die Differenz der Längen ist das Maas des Winkels c, und C der Abstand. Nun zur Sache selbst. Nach einer alten Angabe, soll z. B. die Breite von Dresden 51° 5′ und die

Länge 34° 7′; die Breite hingegen von München 48° 38′ und dessen Länge 31° 25′. Man bilde sich ferner ein, daß in b München, in a aber Dresden liege, so gielt A demnach 90 — 48° 38′ = 41° 22′ und B 90 — 51° 5′ = 38° 55′; c aber ist 34° 7 — 31° 25′ = 2° 42′, so wird

1) r × cos c = cot B × tang x

$$\frac{r \cos c}{\cot B} = \text{tang } x$$

Logarithmisch 19,9995176
10,0929227
9,9065949

Folglich x = 38° 53′
A = 41° 22
x = 38° 53

Demnach A — x = 2, 29

2) r . sin x = cot c . tang P

$$\frac{r \,.\, \sin x}{\cot c} = \text{tang } P$$

Logarithmisch 19,9065949
11,3264372
8,5801577

Also P = 2°, 11

3) r . cos C = cos P . cos A — x

$$\cos C = \frac{\cos P \,.\, \cos (A - x)}{r}$$

Logarithmisch 9,9996846
9,9995919
9,9992765

Folglich C = 3°, 18′. Wird dieser Bogen in Meilen ausgedrückt, so kommen beynahe 50 Meilen heraus.

aus. Weiter unten wollen wir aus dieser Verfahrungsart eine allgemeine Regel abziehen, und einige Beyspiele darnach auflösen.

Vierter Fall. Aus drey gegebnen Seiten die Winkel zu finden.

Auflösung. Dieser Fall verstattet 3 untergeordnete Fälle.

Erstens, wenn bey den dreyen Seiten ein Quadrant ist. Man verlängere eine andere Seite zum Quadranten, oder verkürze sie nach Erfoderniß, und lasse aus dem Gegenwinkel einen Perpendikel herabfällen so ist

$$r \cdot \operatorname{cof} h = \operatorname{cof} c \cdot \operatorname{cof} k$$

$$\frac{r \cdot \operatorname{cof} h}{\operatorname{cof} c} = \operatorname{cof} k$$

Und weil cof c nichts anders ist als sin C, und k nichts anders als das Maaß von A, so verwandelt sich obiger Ausdruck in folgenden um

$$\frac{r \cdot \operatorname{cof} h}{\operatorname{sin} C} = \operatorname{cof} A$$

Ist A einmal gefunden, so lassen sich die übrigen leicht nach dem ersten Falle finden, weil entgegenstehende Seiten und Winkel da sind. Z. B.

$$\operatorname{sin} h : \operatorname{sin} A = \operatorname{sin} B : \operatorname{sin} y$$
$$\text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} = \operatorname{sin} C : \operatorname{sin} x$$

Wenn die Seite größer als ein Quadrant ist, so giebt es fast einerley Rechnung.

Zweytens, wenn zwo Seiten gleich sind, so wird ihr eingeschloßner Winkel und die dritte Gegenseite durch einen Perpendikel in zween gleiche

Theile getheilt, wodurch man zween rechtwinklichte Dreyecke erhält, und sich alles leicht finden läßt. Denn Fig. 10

$$r \cdot \cos a = \cot h \cdot \tan g\, c$$
$$\cos a = \frac{\cot h \cdot \tan g\, c}{r}$$

oder auch $r \cdot \sin c = \sin \frac{1}{2} b \cdot \sin h$

$$\sin \tfrac{1}{2} b = \frac{r \cdot \sin h}{\sin c}$$

Weil ferner $a = A$ ist, so hat man alle drey Winkel gefunden.

Drittens, wenn alle Seiten einander ungleich sind. Man verlängere zwo Seiten zu Quadranten, beschreibe aus dem zwischenliegenden Winkel in der Entfernung von 90° durch die Endpunkte nämlich der verlängerten Seiten einen Bogen so weit bis ihn die dritte verlängerte Seite schneidet, so wird Fig. 11 in unserm Dreyecke b d f folgende Proportion statt haben, wie wir am Ende auch erweisen wollen:

$$(\cos b - \cos d) : (\cos b + \cos d) = \tan g \frac{f}{2} : \tan g \frac{(h+f)+h}{2}$$

Wenn nun hier vom gefundenen letzten Gliede die halbe Differenz $\frac{f}{2}$ subtrahiert wird, so erhält man die kleine Größe das ist h. Nun ist in dem Dreyeck h k p

$$r \cdot \cos m = \cot h \cdot \tan g\, p$$
$$\cos m = \frac{\cot h \cdot \tan g\, p}{r}$$

Die übrigen Winkel stehen dann bekannten Seiten gegenüber, und sind leicht zu bekommen. Z. B.

I $\sin a : \sin f = \sin m : \sin b$

$$\sin a = \frac{\sin f \cdot \sin m}{\sin b}$$

II $\sin c : \sin d = \sin m : \sin b$

$$\sin c = \frac{\sin d \cdot \sin m}{\sin b}$$

Nun zum Beweis.

In dem Dreyeck h k p ist

$r : \sin n = \sin h : \sin p$; im Dreyeck n c R aber

$r : \sin n = \sin (h + f) : \sin q$

$\sin h : \sin p = \sin (h + f) : \sin q$ oder

$\sin h : \cos d = \sin (h + f) : \cos b$ oder verkehrt

$\sin h : \sin (h + f) = \cos d : \cos b$ nach der Proportionslehre:

$$(\sin (h + f) - \sin h) : (\sin (h + f) - \sin h)$$

$$= (\cos b + \cos d) : (\cos b - \cos d)$$

Nehme man ferner an, welches wohl möglich ist, es sey Fig. 12, $x = h + f$

$y = h$

Folglich verhalten sich B und A wie die Sinusse von x und y, oder $(h + f)$ und h. Was demnach von A und B erwiesen ist, das ist auch eben darum von ihren Sinussen erwiesen.

Aber $B + A : B - A = \text{tang } \frac{x + y}{2} : \text{tang } \frac{x - y}{2}$

$\sin(h + f) + \sin h : \sin(h + f) - \sin h = \text{tang } \frac{(h + f) + f}{2}$

tang $\frac{f}{2}$ das ist;

$$(\sin h + \sin (h+f)) : ((\sin h + f) - \sin h)$$
$$= \left(\text{tang } \frac{(h+f)+f}{2}\right) : \text{tang } \frac{f}{2} \text{ aber}$$

$$(\sin h + \sin (h+f)) : ((\sin h + f) - \sin h)$$
$$= (\text{cof } b + \text{cof } d) : (\text{cof } b - \text{cof } d)$$

$$(\text{cof } b + \text{cof } d) : (\text{cof } b - \text{cof } d)$$
$$= \text{tang } \frac{(h+f)+h}{2} : \text{tang } \frac{f}{2} \text{ oder umgekehrt}$$

$$(\text{cof } b - \text{cof } d) : (\text{cof } b + \text{cof } d)$$
$$= \text{tang } \frac{f}{2} : \text{tang } \frac{(h+f)+h}{2}$$

§. 40. **Anmerk.** Wenn wir mit Herrn Schulze die Figur nach Fig. 13 bezeichnen, so läßt sich Klemms Satz §. 823 allgemein auf folgende Weise ausdrücken, so wie ihn auch oben erwähnter Schulze aber ohne Beweis hingesetzt

$$\sin b \,.\, \sin c : \sin \tfrac{1}{2}(a+b-c) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(a+c-b)$$
$$= r^2 : (\sin \tfrac{1}{2} A)^2$$

und umgewandt für den letzten Fall

$$\sin C \,.\, \sin A : \text{cof } \tfrac{1}{2}(B+C-A) \,.\, \text{cof } \tfrac{1}{2}(B+A-C)$$
$$= r^2 : (\text{cof } \tfrac{1}{2} b).$$

Fünfter Fall. Aus den drey Winkeln, die Seiten zu finden. Wir müssen allererst einen Lehrsatz vorausschicken.

§. 41. **Lehrsatz.** Wenn die Seiten eines Kugeldreyecks an beyden Endpunkten zu 90° ergänzt, und durch die Endpunkte der Ergänzungen Bögen größter Zirkel gelegt werden, die sich überall durchschneiden, und ein neues Kugeldreyeck bilden, so sind die Seiten dieses neuen Dreyecks, die Komplemente zu 180 der Winkeln des vorigen Dreyeckes,

wie sie einander entgegen stehen; und umgekehrt, die Winkel des neuen Dreyecks, die Komplemente zu 180° der Seiten des vorigen.

Erster Satz. Fig. 14

$$d + gl = 180$$

Beweis.

$$bl + gp = 180 \text{ oder}$$
$$gl + gb + lp + lg = 180 \text{ d. i.}$$
$$bp + lg = 180$$

Zweyter Satz.

$$ad + l = 180$$

Beweis.

$$ac + bd = 180 \text{ oder}$$
$$ab + bc + cd + bc = 180 \text{ oder}$$
$$ad + l = 180$$

So läßt sich der Beweis von allen übrigen Seiten und Winkeln führen.

Auflösung des fünften Falles. Man schreibe statt der Winkel ihre Komplemente zu 180°, denke sie als Seiten in ein Dreyeck zusamm, und verfahre wie oben. Hat man nun einen Winkel gefunden, so ist dieß das Komplement der überstehenden Seiten zu 180°.

Eine abgezogene Verfahrungsart, aus den gegebnen geographischen Längen und Breiten zweyer Oerter, ihre wahre Entfernung von einander zu finden.

a) Man schreibe sowohl den Log. Sinus, als rechts daneben den Log. Kosinus vom Längenunterschiede heraus.

b) Rechts wird das Kennziffer um 10 vermehrt, und der Log. Tang. von der größern Breite davon abgezogen. Der Logarithmenrest wird unter der Tangentenrubrik aufgeschlagen, der entsprechende Bogen herausgeschrieben, und die kleinere Breite dazu addiert.

* Ist die Längendifferenz über 90°, dann wird die kleinere Breite statt dem Addieren, subtrahiert.

** Heißt eine Breite südlich, die andere nördlich, so wird die nördliche abgezogen.

*** Beträgt die Längendifferenz genau 180°, so läßt sich die Entfernung ohne Trigonometrie finden. Es dörfen nämlich nur die zwo Breiten (wenn sie beyde nördlich oder südlich sind) von selben subtrahiert werden; ist aber eine Breite in diesem Falle nördlich, die andere südlich, so addiere man die kleinere Breite zu 180°, und ziehe die größere ab.

c) Vom obiggefundnen Logarithmenreste gerade über schreibe man auf der Kosinusseite den Log. Sinus heraus, addiere ihn zur Linken, und verringere das Kennziffer um 10.

d) Man suche diese Logarithmensumme unter den Log. Sinus auf, und schreibe den gegenüberstehenden Log. Kosinus heraus, addiere den Log. Sinus des obigen Bogenaggregats oder Differenz dazu,

dazu, vermindere das Kennziffer um 10, so hat man den Log. Kosinus der verlangten Entfernung.

* Beträgt die Längendifferenz über 180°, so berechne man ihren Komplementsbogen.

Ein Beyspiel.

Nach Pescheck hat Lisabon 9°53′ Länge, und 38°40′ Breite. Hingegen Nankin 136°11′ Länge, und 30°15′ Breite; wie weit liegen diese beyde Städte voneinander?

Differenz 136°11′ — 9°53′ = 126° 18′; folglich sein Komplementsbogen 53°42′

Links	Rechts
9,9062964	19,7723314
9,9051787	9,9031966
x9,8114751	9,8691348

Tang 36° 30′
kleinere Breite 30 15

6° 15′ Diff.

9,9239191
9,0368958

x8,9608149 welchem Log. ein Kosinus von 84°46′ entspricht, dessen Komplementsbogen 105° 14′ ist.

Ein anders.

Nach Pescheck hat Paris 22°23′ Länge u. 48°38′ B.
München 31°25′ — — 48°38′ —

Diff. 9° 2′

x 9,1959247	19,9945798
9,8789840	10,0582865
9,0749087	9,9362933

40° 49′
48 38
89° 27′

	9,9969191
	9,9999800
x 9,9968991	

, welchem der Log. Cos. von 6° 51′ entspricht. Weil nun auf einen Grad 15 Meilen gehen, so giebt die Regeldetri

G.	Meil.	G.	Min.	
1	15	6	51	
60	1	60		
		411		$102\frac{3}{4}$ Meil.
4		444		

Höhere

Höhere Mathematik.

§. 1. Erklärung.

Unter dem Worte, höherer Mathematik, wird theils die Rechnung des Unendlichen, theils die Lehre von den krumen Linien verstanden. Im ersten Falle hat man die Differential- und Integralrechnung; im zweyten die höhere Geometrie, wo jene erst häufige Anwendung findet, und ihre sonstige Benennung: Analyse unendlicher Größen, ganz verdienet.

§. 2. Anmerk. Es giebt Mathematiker, welche beyde Theile unter den Namen höherer Geometrie befassen wollen; weil sowohl die Erfindung als auch die meiste Anwendung der Analyse auf diesem Zweige der Geometrie beruhet. Es hat indeß jede Parthey ihre Gründe, und die Sache verschlägt eben nichts, man mag diese oder jene Eintheilung annehmen.

§. 3. Anmerk. Für beyde Theile müssen einige Vorbegriffe vorausgeschickt werden, die also erst wohl gefaßt zu werden verlangen.

Von veränderlichen und beständigen Größen, und von den Funktionen.

§. 4. Anmerk. Mit eben dem Nachdrucke, womit am Anfange der Buchstabenrechnung die Begriffe von entgegengesetzten, das ist, von negativen, und positiven Größen anempfohlen worden, empfiehlt man hier mehrmals am Anfange der höhern Mathematik noch neben denselben die Begriffe von veränderlichen und beständigen Größen um so nachdrücklicher, weil sie in diesen Theile der Mathematik durchgehends namhaften Einfluß behaupten.

§. 5. Erkl. Jede bestimmte Größe, die als solche betrachtet eines Wachsthumes, oder Abnahmes fähig ist, heißt veränderlich: hingegen die keines Wachsthumes noch eines Abnahmes fähig sind, ohne ihre Bestimmtheit zu verlieren, werden beständig genennt.

Der Radius ein und des nämlichen Zirkels z. B. man mag ihn ziehen wo man will, ist weder eines Wachsthums noch eines Abnahms fähig, sondern behält immer die nämliche Länge bey. Die Sehne aber kann bald größer, bald kleiner werden, ohne dadurch den Karakter einer Sehne im nämlichen Zirkel zu verlieren.

§. 6. Willk. Satz. Die beständigen Größen ist man gewohnt mit den ersten Buchstaben des Alphabets a, b, c. u. s. f.; die veränderlichen aber mit den letzten Buchstaben x, y, z, u. d. gl. auszudrücken.

§. 7. Erkl, Funktionen sind veränderliche Größen, die bey einer oder mehr obwaltenden beständ-

ständigen Größen so miteinander in Verwandtschaft stehen, daß der Wachsthum oder die Abnahme der einen unvermeidlichen Einfluß auf die Veränderung der andern habe.

Dieß zu erläutern, dienen die trigonometrischen Linien. Mit dem Sinus wachsen, beym nämlichen Radius, §§. 10. 11. Trig. die Tangente und Sekante: aber ihr Wachsthum veranlaßt auch zugleich unmittelbar den Abnahm aller Kolinien, als des Kosinus, Kotangente, u. s. f.

Auch die Arithmetik ist fruchtbar an Funktionen; Eine beständige Summe können was immer für zwo veränderliche Zahlen geben, wenn sie nur zusamm nicht mehr oder weniger betragen, als die festgesetzte Summe. Denn so z.B. ist $8 + 12 = 20$, oder $9 + 11 = 20$, oder $17 + 3 = 20$; überhaupt also $x + y = a$, wo immer die eine abnimmt wie die andere zugenommen, und umgekehrt. Man kann demnach x oder y weder klein genug, wie ohnehin klar ist, noch auch groß genug setzen, ohne daß nicht auch die andere Funktion einen Werth erhalt. Denn setzt man x in unsern Beyspiele $= 30$, so wird y einen negativen Werth bekommen, und -10 heißen, uud so von andern Substitutionen zu reden. Bey beständigen Differenzen hingegen wächst eine Funktion mit der andern; und nimmt eine mit der andern ab. Z. B. $7 - 3 = 4$, oder $8 - 4 = 4$, oder $6 - 2 = 4$; überhaupt $x - y = d$. Auf eine ähnliche Art läßt sich auch vom beständigen Produkten und Quotussen sprechen.

§. 8. **Einth. und Erkl.** Man theilt die Funktionen in algebraische und transcendentische ein. Algebraisch heißen sie, wenn selbe sich unter das Gesetz einer ausführbaren Gleichung bringen lassen, das heißt in eine Gleichung, woraus der Werth jeder Funktion allein bestimmt werden kann. Im widrigen Falle sind sie transcendentisch.

So ist der Sinus eine algebraische Funktion vom Kosinus des nämlichen Bogens; denn sie lassen sich in die Gleichung bringen, $\sin.\Phi = \sqrt{r^2 - \cos.^2\Phi}$ §§. 13. 18. oder nach unsern Ausdrücken $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, wo sich y eben so gut allein, als x finden läßt. Der Sinus hingegen und sein zugehöriger Bogen sind transcendentische Funktionen; weil die Bögen nie in dem Verhältniß ab- oder zunehmen, wie ihre Sinusse. Die algebraischen Funktionen werden ferner eingetheilt in einförmige und mehrförmige. Jene bekommen mit jeder beliebigen Substitution nur einen einzigen Werth, diese erhalten mehrere Werthe, je nachdem eine oder auch beyde zu Würden erhoben sind. Z. B. In der Gleichung $y = \frac{bx}{a}$ sind einförmige Funktionen; In $y = \pm\sqrt{ax - x^2}$ zweyförmige, weil y allemal einen positiven und negativen Werth erhält, man mag für x setzen was man will.

Die übrigen Eintheilungen bleiben bey unsern Gebrauch derselben ohne sonderlichen Nutzen, und können in ausführlichern Schriften, wie in Klemm, u. a. wenn man will, nachgelesen werden.

Vorbegriffe vom Unendlich-Großen und Kleinen.

§. 9. **Erkl.** Endlich heißt eine Größe, in so fern sie noch Gränzen hat. Gränzenlose Größen heißen daher aus dem Gegensatze, unendliche Größen.

Die Tangente von 90°, wie wir in der Trigonometrie gesehen, läßt unmöglich Gränzen gedenken, folglich wird sie mit allem Rechte unendlich groß genannt.

§. 10. **Lehrsatz.** Auch in der Arithmetik lassen sich unendliche Größen gedenken.

Beweis.

Man nehme eine endliche Größe so klein, als man will, an, so wird sie durch fortgesetztes Verdoppeln oder Tripplieren u. s. f. sich einmal über die Einheit erschwingen, und dieselbe bald sehr weit zurücklassen: wenn nun diese Zahl immerfort sehr geschwinde quadriertwird, das heißt, wenn man allemal das, was durch quadrieren herausgekommen, wieder mit sich selbst multiplicieret, so wird man zuletzt auf eine Zahl kommen, die wegen ihrer Größe nicht mehr geschrieben werden kann, und folglich weil sie sich unter keine Gränzen mehr bringen läßt, unendlich groß genennt werden darf.

§. 11. **Lehrsatz.** Jede endliche Größe zu einer unendlich großen Größe addiert, verschwindet in Rücksicht derselben.

Satz.

$$\infty + x = \infty$$

Beweis.

$\frac{x}{c} = \infty$ Nach §. 25 Trig.

$x\,o \qquad x = o \times \infty$

Prop. $1 : o = \infty : x$

$1 : (1+o) = \infty : (\infty + x)$

oder $(1+o) : 1 = (\infty + x) : \infty$

d. i. $1 : 1 = (\infty + x) : \infty$

Und $\infty + x = \infty$.

§. 12. Zusatz. Eben so wird erwiesen, daß eine endliche Größe von einer unendlich großen subtrahiert, gleichfalls verschwinde: denn

$1 : o = \infty : x$ §. 11.

oder $1 : (1-o) = \infty : (\infty - x)$

$1 : 1 = \infty : (\infty - x)$

$\infty - x = \infty$

§. 13. Zusatz. Es ist also allgemein wahr, daß $\infty \overline{+} x = \infty$ sey.

§. 14. Anmerk. Diese und folgende Beweismethoden vom Unendlichen sind meist mit einigen Veränderungen aus Vegas mathematischen Vorlesungen wegen ihrer Faßlichkeit entlehnt worden. Denn Kästners und Eulers Beweisarten scheinen bis daher noch für unsern Himmelsstrich einmal zu abstrakt.

§. 15. Erkl. Wenn unendliche Größen zum Quadrat erhoben sind, so heißen sie unendlich große und kleine Größen des zweyten Ranges oder der zweyten Ordnung; zum Kubus erhoben, der dritten Ordnung u. s. f. Z. B. ∞, ∞^2, ∞^3 ∞^4 und so weiter. Ferner $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$ u. s. f.

§. 16. **Lehrsatz.** Eine unendliche Größe des ersten Ranges verschwindet in der Addition oder Subtraktion in Rücksicht einer unendlichen Größe des zweyten Ranges.

Satz.

$$\infty^2 \pm \infty = \infty^2$$

Beweis.

$$1 : \infty = \infty : \infty^2$$

Verkehrt
$$\infty : 1 = \infty^2 : \infty$$
$$\infty : \infty \pm 1 = \infty^2 : \infty^2 \pm \infty$$

Aber Gemäß dem vorigen ist

$$\infty = \infty \mp 1$$

Also subst. $\infty : \infty = \infty^2 : \infty^2 \pm \infty$

$:\infty:$ $1 : 1 = \infty^2 : \infty^2 \pm \infty$

Sohin $\infty^2 \pm \infty = \infty^2$

§. 17. **Zusatz.** Eben so richtig ist es allgemein, daß jede unendlich große Größe eines niederen Ranges in Rücksicht einer andern vom höhern Range verschwindet. Denn es ist auch

$$1 : \infty = \infty^2 : \infty^3$$

Versetzt. $\infty : 1 = \infty^3 : \infty^2$ Es ist aber auch

$$\infty : \infty \pm 1 = \infty^3 : \infty^3 \pm \infty^2$$

und weil wieder $\infty = \infty \mp 1$

$$\infty : \infty = \infty^3 : \infty^3 \pm \infty^2$$

$:\infty:$ $1 : 1 = \infty^3 : \infty^3 \pm \infty^2$

$$\infty^3 = \infty^3 \mp \infty^2 \text{ u. s. f.}$$

§. 18. **Lehrsatz.** Eine unendlich kleine zu einer endlichen addiert, oder von ihr subtrahiert, verschwindet mehrmals.

Satz.

Satz.

$$1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$$

Beweis.

$$\frac{1}{\infty} : 1 = 1 : \infty$$

Verkehrt

$$1 : \frac{1}{\infty} = \infty : 1$$

Und

$$1 : 1 \pm \frac{1}{\infty} = \infty : \infty \pm 1$$

aber

$$\infty = \infty \pm 1$$

Substit.

$$1 : 1 \pm \frac{1}{\infty} = \infty : \infty$$

$$1 : 1 \pm \frac{1}{\infty} = 1 : 1$$

$$1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$$

§. 19. **Lehrsatz.** Eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung verschwindet in Rücksicht einer solchen„Ordnung.

Satz.

$$\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$$

Beweis.

$$1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$$

$$1 : 1 \pm \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2}$$

Aber

„welche größe

Aber $1 = 1 \pm \frac{1}{\infty}$ folglich subst.

$$1 : 1 = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2}$$

Und $$\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$$

§. 20. **Zusatz.** Ueberhaupt verschwinden unendlich kleine Größen der höhern Ordnung in Rücksicht solcher der niedern Ordnung, denn es ist wieder

$$\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty^3} : \frac{1}{\infty^4}$$

$$\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty^3} : \frac{1}{\infty^3} \pm \frac{1}{\infty^4}$$

Aber $\frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2}$

Subst. $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^3} : \frac{1}{\infty^3} \mp \frac{1}{\infty^4}$

$x\infty \quad 1 : 1 = \frac{1}{\infty^3} : \frac{1}{\infty^3} \mp \frac{1}{\infty^4}$

Und $\frac{1}{\infty^3} = \frac{1}{\infty^3} \pm \frac{1}{\infty^4}$

§. 21. **Anmerk.** Unendlich kleine Größen giebt es zwar in der physischen Welt nicht; aber sie kommen dem Mathematiker doch gut zu statten, wenn er sich bey Zergliederung endlicher Größen ihre Entstehung nicht als ein plötzliches Daseyn; sondern als eine allmählig sanfte Entwickelung der möglich kleinsten Wachsthümer vorstellt. Auf gleiche Art läßt er auch Größen nicht auf einmal, sondern nach und nach in den kleinsten Abnähmen sich verlieren.

Z. B. Der Sinus vom Nullgrade wird nicht mit einem Male zum Sinustotus, sondern er wächst, so zu sagen, Punkt für Punkt durch alle Sekunden, Terzen, Quarten u. d. gl. des Quadrantens. Und so muß auch von der Abnahme desselben im zweyten Quadranten gesprochen werden.

Je kleiner man also solche Wachsthümer und Abnähme annimmt, desto richtiger muß auch am Ende das Resultat von der Beschaffenheit der Zusammensezung, oder Vernich-

tung solcher Größen seyn. Man ist demnach am besten daran, wenn sie so klein genommen werden, daß sich nichts kleiners darüber denken oder angeben läßt, und dieß heißt in der Sprache der Mathematiker unendlich kleine Größen, oder Differentiale endlicher Größen.

Differentialrechnung.

§. 22. Erkl. Die Anweisung, die unendlich kleinsten Wachsthümer oder Abnähme, das heißt die Differentiale veränderlicher Größen in jedem Zustande oder Verhältniß derselben richtig zu bestimmen, wird Differentialrechnung genennt.

§. 23. Zusatz. Beständige Größen haben ihrem Begriff gemäß keine Differentiale.

§. 24. Willk. Satz. Das Zeichen eines Differentials ist nicht mehr $\frac{1}{\infty}$, sondern ein d, welches vor der abnehmenden, oder zunehmenden Größe hingeschrieben wird. Z. B. dx, dy, dz, wo d kein Faktor ist, sondern mit seinem dabeystehenden Buchstaben, den unendlich kleinen Wachsthum oder Abnahm der Größe bedeutet, ungefähr wie $\frac{x}{\infty}$, $\frac{y}{\infty}$, $\frac{z}{\infty}$ u. s. f.

§. 25. Zusatz. Wenn also die Größe vor seinen Wachsthum x heißt, so ist sie nachher $x + dx$, oder nach der Abnahme $x - dx$. Ueberhaupt $x \pm dx$. Weil sie nachher um $\frac{x}{\infty}$ größer oder kleiner geworden.

§. 26. Zusatz. Das Differential von a oder b, in so ferne sie beständige Größen bedeuten, ist also $= 0$ das heißt $da = 0$, $db = 0$ u. s. f.

Anmerk.

§. 27. **Anmerk.** In der Geometrie lassen sich die Differentiale von Linien so ziemlich versinnlichen. Man ziehe Fig. 1 nur das Dreyeck a k p, und bilde sich ein die Linie a b wachse so lange mit der Funktion b c fort, bis beyde eine bestimmte Gränze z. B. k p erreichen, so kann a b durch x und b c durch y ausgedrückt werden. Wenn nun dieses a b um ein unendlich kleines Stück b f, welches b f wegen ihrer unendlichen Kürze freylich nicht gezeichnet werden kann, gewachsen ist, so wird auch b c um das unendlich kleine Stück ~~k~~g zugenommen haben. Die Linien heissen nun nach dem Wachsthum x + dx und y + d y. Wenn endlich ihre vorigen Größen x y davon abgezogen werden, so bleiben ihre Differenzialen übrig; also x + d x — x = d x und y + d y — y = d y.

ng

§. 28. **Zusatz.** Es läßt demnach nicht schwer, einzelne Größen zu differenzieren; man hat nichts weiter zu thun, als daß man ihnen das gewöhnliche d vorsetzt. So ist z. B. d(x — y + z + a) = d x — d y + d z. Anders verhält sich aber die Sache mit Würden, Produkten und Quotienten.

§. 29. **Lehrsatz.** Das Differential einer Würde ist ein Produkt von drey Faktorn, welche der Exponent, die Würde selbst mit seinen um eines verringerten Exponenten, und das Differential der Urgröße, oder simpeln Größe sind.

Satz.

$$d(x^m) = m x^{m-1} dx$$

Beweis.

Man erhebe x sammt seinem Differential d x, vermöge des binomischen Lehrsatzes, zur mten Würde: erhebe auch x ohne Differential zur nämlichen Würde, so wird der Unterschied dieser Würden eben darum das Differenzial der Würde selbst geben.

$d(x^m)$

$$d(x^m) = (x+dx)^m - x^m = x^m + m x^{m-1} dx + \frac{m(m-1)}{1 \times 2} x^{m-2} dx^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3} x^{m-3} dx^3 \ldots - x^m$$

$d(x^m) = m x^{m-1} dx$; denn die übrigen Glieder verschwinden alle, als unendlich kleine Größen der höhern Ordnung, in Rücksicht solcher der niedern Ordnung.

§. 30. **Zusatz.** Um also eine Würde zu differenzieren, darf nur der Exponent zum Koefficienten gemacht, er selbst um eines vermindert, und diesen beyden Faktorn das Differential der simpeln Größe als dritter Faktor angehängt werden, z. B. $d(x^5) = 5 x^4 dx$.

§. 31. **Zusatz.** Weil sich alle Wurzelgrößen auf Würden gebrochner Exponenten reduzieren lassen, so sind wir auch itzt schon im Stande, alle einfache Wurzelgrößen, mit zu Hilfe gerufner Würdenlehre, zu differenzieren. Z. B. $d(\sqrt[3]{x^3}) = d(x^{\frac{2}{3}})$

$$= \tfrac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} dx = \frac{2 x^{-\frac{1}{3}} dx}{3} = \frac{2 dx}{3 x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2 dx}{3 \sqrt[3]{x}}$$

§. 32. **Zusatz.** Auch sogar Brüche, die zum Zähler die Einheit, und zum Nenner eine veränderliche Größe haben, lassen sich nach dem Bisherigen differenzieren, z. B. $d(\frac{1}{x}) = d(x^{-1}) = -1$

$$x^{-2} dx = -x^{-2} dx = \frac{-dx}{x^2}$$

§. 33. **Lehrsatz.** Das Differential eines Produkts von zwoen veränderlichen Größen ist gleich dem ersten Faktor in das Differential des zweyten multipliciert, mehr dem zweyten Faktor in das Differential des ersten multipliciert.

Satz.

Satz

$$d(xz) = xdz + zdx$$

Beweis.

Man multipliciere zuerst die Faktorn mit ihren Differentialen unter sich, dann auch ohne Differential, so wird der Unterschied der Produkte das verlangte Differential geben.

$$\begin{aligned} d(xz) &= (x + dx)(z + dz) - xz \\ &= xz + xdz + zdx + dxdz - xz \\ &= xdz + zdx + dxdz, \text{ also} \end{aligned}$$

$d(xz) = xdz + zdx$; weil das letzte Glied aus obigen Grunde wieder verschwindet.

§. 34. **Anmerk.** La Kaile, der alle Beweise für die Differentialrechnung aus der Geometrie herholet, wodurch freylich die Sache das Ansehen gewinnt, als hange dieser Zweig der Mathematik ganz von der Geometrie ab, hat obigen Satz beyläufig so bewiesen. Ein Produkt von zweenen Faktorn stellt den Inhalt eines Parallelograms vor, dessen Faktorn Höhe und Grundlinie sind. Wachsen nun Höhe und Grundlinie, so bekömmt das Parallelogram ein Differential, welches aus drey unendlich kleinen Parallellogramen bestehet. Es ist nämlich Fig. 2

$\therefore d(\square apbf) = bcfg + pqkf + fghk$

da nun $bc = fg = dz$

$cg = bf = ap = x$

so ist $bcfg = xdz$; auf gleiche Art auch

$pqkf = zdx$ und

$fghk = dxdz$. Nun substit.

$d(xz) = xdz + zdx + dxdz$ und weil das letzte Glied aus mehrmal angeführtem Grunde wegfällt; so ist noch $d(xz) = xdz + zdx$. Ein sehr sinnlicher, und eben so strenger Beweis.

§. 35. Zusatz. Ist bey dem Produkt einer von den zween Faktoren beständig, so wird bloß der beständige Faktor mit dem Differentiale des veränderlichen multipliciert. Der Beweis davon fließt zwar schon aus obigen Satze; Denn $d(ax) = adx + xda = adx + x \times o = adx$: allein er läßt sich weit richtiger aus obigen Gründen führen. Es ist nämlich wieder $d(ax) = (a + da) \times (x + dx) - ax = a \times (x + dx) - ax = ax + adx - ax = adx$.

§. 36. Lehrsatz. Das Differential eines Produkts von dreyen, oder mehr veränderlichen Größen erhält man, wenn vom Produkt immer ein Faktor weggelassen, und statt dessen sein Differential gesetzt wird, und dieß so oft, bis die Reihe alle Faktoren durch und durch getroffen.

Satz.

$$d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx.$$

Beweis.

Es sey $xy = v$, so ist $x = dv$. *

$z \times$ $xyz = vz$

Daher $d(xyz) = vdz + zdv$

Subst. für v und dv

Also $d(xyz) = xydz + z(xdy + ydx)$

$d(xyz) = xydz + zxdy + zydx$

§. 37. Zusatz. Eben so leicht ist es auch zu beweisen, daß $d(xvyz) = vxydz + vxzdy + vyzdx + xyzdv$; und so auch von fünf, sechs, und noch mehr Faktorn zu reden.

* $xdy + ydx$.

§. 38.

§. 38. **Zusatz.** Finden sich auch beständige Größen als Faktorn ein, so geht die Regel wie oben fort, nur daß selbe kein Differential haben, folglich jene Glieder, in welche sie multipliciert werden sollten, wegfallen, als Produkte nämlich, welche Null zum Faktor haben, z. B. $d(amxyz) = amxydz + amxzdy + amyzdx$. Denn $axyzdm = axyzx0 = 0$ u. s. f.

§. 39. **Zusatz.** Nun ist man bereits im Stande auch zusammengesetzte Würdengrößen zu differenzieren. Z. B. $d(x^2y^3) = x^2 d(y^3) + y^3 d(x^2) = x^2 \times 3y^2 dy + y^3 \times 2xdx = 3x^2y^2 dy + 2y^3 xdx$

§. 40. **Lehrsatz.** Das Differential eines Quotienten oder Bruches ist gleich dem Nenner multipliciert mit dem Differential des Zählers, weniger dem Zähler multipliciert mit dem Differential des Nenners, dieß alles durch das Quadrat des Nenners dividirt.

Satz.

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = y\frac{dx - xdy}{y^2}$$

Beweis.

Man dividiere die beyden Größen mit ihren Differentialen, und ohne denselben; der Unterschied wird wieder das Differential des Quotienten selbst seyn. Es ist demnach.

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x + dx}{y + dy} - \frac{x}{y}$$

Unter gleiche Nenner gebracht. $= \frac{xy + y\,dx - xy - x\,dy}{y^2 + y\,dy}$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = y\frac{dx - x\,dy}{y^2}$$; denn $y\,dy$

verschwindet im Nenner als eine unendlich kleine Größe in Rücksicht der endlichen y^2

§. 40. **Anmerk.** Dieß läßt sich sehr anschauend aus der Geometrie beweisen. Man beschreibe Fig. 3. zween Zirkel in einander, die sich unendlich nahe liegen, und in einem Punkte berühren. Aus diesen Punkt werde eine Sehne sammt ihrem Differentiale gezogen, so sind, wenn man selbe durch eine andere Sehne die ebenfalls wieder zwo Differentiale haben wird, durchschneidet, die Produkte der Segmente in beyden Fällen gleich. Es ist nämlich

I. $zy = x.x = x$ und

$:y: \quad z = \frac{x}{y}$

II. $x \times (x+dx) = (y+dy) \times (z+dz)$

$x + dx = yz + zdy + ydz + dydz$

Subst. $x + dx = \frac{yx}{y} + \frac{xdy}{y} + yd\left(\frac{x}{y}\right) + dydz$

Abgek. $x + dx = x + \frac{xdy}{y} + yd\left(\frac{x}{y}\right) + dydz$

$dx = \frac{xdy}{y} + yd\left(\frac{x}{y}\right)$

$dx - \frac{xdy}{y} = yd\left(\frac{x}{y}\right)$

$:y$

$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$

Und zu gleichen Nennern gebracht.

$$y\frac{dx - x\,dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$$

§. 41. Zusatz. Sind der Nenner oder der Zehler beständig, oder mit beständigen Größen vermischt, so läßt sich die allgemein bewiesene Regel ebenfalls anwenden. Zum Beyspiel:

1) $d\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{x\,da - a\,dx}{x^2} = -\frac{a\,dx}{x^2}$

Denn $\frac{a + da}{x + dx} - \frac{a}{x} = \frac{a}{x+dx} - \frac{a}{x}$

$= \frac{ax - ax - a\,dx}{x^2 + x\,dx} = \frac{-a\,dx}{x^2}$

2) So ist auch $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a\,dx}{a^2} = \frac{dx}{a}$

§. 42. Zusatz. Obwohl sich alle mögliche Größen nach den bisherigen Regeln differentieren lassen, so kann es doch Fälle geben, wo man durch Hilfe anderer Kunstgriffe leichter abkömmt. Man nennt dieß die Transformation, und kömmt sehr gut bey zusammgesetzten Größen zu statten. Es wird nämlich die ganze komplexe Größe einem Buchstaben gleichgesetzt, und so lange fortkalkuliert, bis der Ausdruck zum Differentieren geschickt ist. Nach der Differentiation kann dann wieder der eigentliche Werth substituiert werden. Wir wollen die beyden Arten im nächsten besten Beyspiele vergleichen, und sehen, welche kürzer, und leichter ist. Es soll $\sqrt[3]{ax - y^2 + xz}$ differentiert werden. Erst auf gemeine Art:

$d(\sqrt[3]{ax - y^2 + xz}) = d(ax - y^2 + xz)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3}(ax - y^2 + xz)^{\frac{1}{3}-1}\, d(ax - y^2 + xz)$

$= \frac{1}{3}(ax - y^2 + xz)^{-\frac{2}{3}}(a\,dx - 2y\,dy + x\,dz$

$+ z\,dx) = \frac{1}{3} \times (\overline{ax - y^2 + xz}^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{3}} \times (a\,dx -$

$$-2ydy + xdz) = \frac{adx - 2ydy + xdz}{3(ax - y^2 + xz)^{\frac{2}{3}}} +$$

$$+2dx = \frac{adx - 2ydy + xdz + 2dx}{3\sqrt[3]{(ax - y^2 + xz)^2}}$$

Durch Transformation.

$$\sqrt[3]{ax - y^2 + xz} = p$$

$$ax - y^2 + xz = p^3$$

diff. $\quad adx - 2ydy + xdz + zdx = 3p^2\,dp$

$: 3p^2 \quad \frac{adx - 2ydy + xdz + zdx}{3p^2} = dp$

subst. $\quad \frac{adx - 2ydy + xdz + zdx}{3\sqrt[3]{(ax - y^2 + xz)^2}}$

§. 43. **Erkl.** Es kann auch Fälle geben, wo die Differentialen selbst noch eines Wachsthumes, oder Abnahmes fähig sind, daher werden zuweilen die Differentiale noch einmal differentiert, und dann heißen sie Differentiodifferentiale.

§. 44. **Zusatz.** Differentiale nochmal zu differentieren, kann keine Schwierigkeit haben. Man darf nur, um aller Verwirrung auszuweichen, statt den simpeln Differentialen einen Buchstaben setzen, und nach der Differentiation wieder substituieren.

§. 45. **Aufgabe.** Es soll $\frac{xdy - ydx}{x^2}$ nochmal differentiert werden.

Auflösung. Es sey $dy = v$ und $dx = z$ so ist $\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xv - yz}{x^2}$

Nun

Nun ist ferner $d\left(\frac{xv - yz}{x^2}\right) = \frac{x^2 d(xv - yz) - (xv - yz)\, d(x^2)}{x^4}$

$$\frac{x^2\left(\frac{x\,dv + v\,dx - y\,dz - z\,dy}{x_4}\right) - (xv - 'yz) \times 2x\,dx}{}$$

$$\frac{x^3\,dv + x^2\,v\,dx - x^2 y\,dz - x^2\,z\,dy - 2x^2\,v\,dx + 2x\,yz\,dx}{x4}$$

Subſtit. $\frac{x^3\,ddy + x^2\,dx\,dy - x^2 y\,ddx - x^2\,dx\,dy - 2x^2\,dx\,dy + 2xy\,ddx}{x_4}$

Oder auch abgekürzt.

$$\frac{x^3\,d^2y - 2x^2\,dx\,dy - x^2 y\,d^2x + 2xy\,d^2x.}{x4}$$

S. 46. Anmerk. Von dieſen Beyſpiele läßt ſich gar leicht auf andere ſchließen, wenn man gähling dergleichen Differentiodifferentiale nöthig haben ſoll.

Etwas vom größten, und kleinsten Werthe der Funktionen, als eine vorläufige Anwendung der Differentialrechnung.

§. 47. **Erkl.** Es kann Größen geben, die nicht immer fort wachsen, oder abnehmen, sondern irgendwo ihre Differentiale einen Augenblick aufhören, und in die entgegengesetzte umändern lassen. So z. B. steigt ein in die Höhe geworfner Stein, oder eine Bombe anfangs immer höher und höher, endlich kehren diese Körper um, und fallen wieder immer tiefer und tiefer. So schwillt bey der Fluth des Meeres das Wasser immer mehr an, bis es eine gewisse Höhe erreichet, von der es wieder sinket, und zwar ebenfalls bis auf ein gewisses Ziel, wo es mehrmals zu steigen anfängt. Diese Zustände solcher Größen nun heißen größte und kleinste Werthe der Funktionen.

§. 48. **Zusatz.** Weil in solchen Zuständen die Differentiale der Funktionen wegen ihrer Vernichtung kein Verhältniß zu einander haben, das heißt, weil ihr Verhältniß zu einander Null ist, so können die Werthe des Kleinsten, oder Größten unter dieser Hypothese leicht bestimmt werden; denn man darf nur die Verhältniße der Differentiale $= o$ setzen, und dann sehen, was sich für die eine, oder die andere Funktion ergiebt.

§. 49. **Zusatz.** Ob der herausgekommne Werth ein Größter oder Kleinster sey, kann nicht anders, als aus den Umständen der Aufgabe abgenommen werden.

§. 50. **Aufgabe.** Auf welchen Punkt des Diameters im Zirkel läßt sich der größte Perpendikel aus der Peripherie herabfällen?

Auf-

Auflösung. Man suche eine Gleichung für diesen Perpendikel, differenziere sie, und lasse das Verhältniß der Differentiale der beyden Funktionen Null werden, so werden die Umstände, unter welchen die Forderung möglich ist, aus der Gleichung bald sichtbar seyn. Es heiße Fig. 4. der Perpendikl $ab = y$ das eine Segment $db = x$ so ist das andere ba, wenn a den Diameter ab bezeichnet $= a - x$

Folglich
$$y^2 = x(a - x)$$
$$y^2 = ax - x^2$$
$$y = \sqrt{ax - x^2}$$
$$y = (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Diff.
$$dy = \tfrac{1}{2}(ax - x^2)^{\frac{1}{2}-1}\, d(ax - x^2)$$
$$dy = \tfrac{1}{2}(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}(a\,dx - 2x\,dx)$$
$$dy = \frac{a\,dx - 2x\,dx}{2(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

:dx
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - 2x}{2(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

aber
$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$0 = \frac{a - 2x}{2(ax - x2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$X\,2(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}\quad 0 = a - 2x$$
$$2x = a$$
$$x = \tfrac{1}{2}a$$

Dieß geschieht also in jenem Punkte des Diametes, wo ein Segment, folglich auch das andere dem halben Diameter gleich ist, das ist im Mittelpunkte.

§. 51.

§. 51. **Aufgabe.** Ein Haus soll bis an den Dachstuhl 45000 Kubikfuß in sich fassen. Der Grund dazu ist aber nicht länger, als 50 Schuh. Fragt sich, wie sollen sich Länge und Breite zu einander verhalten, daß die Außenfläche des Hauses die Kleinstmöglichste werde; das heißt, daß man die wenigsten Baumaterialien brauche, folglich auch die kürzeste Zeit zum Bauen verwendet werde?

Auflösung. Es sey $45000 = q$

Die Länge $50 = b$

Breite $= x$

so ist die Höhe $= \frac{q}{bx}$

Nun ist die Grundfläche dieses Parallelepipedums $= bx$, die senkrechte Seitenfläche auf der Länge $b \times \frac{q}{bx} = \frac{bq}{bx} = \frac{q}{x}$ und die senkrechte Seitenfläche der Breite.

$= x \times \frac{q}{bx} = \frac{xq}{bx} = \frac{q}{b}$

Folglich die halbe Oberfläche $y = bx + \frac{q}{x} + \frac{q}{b}$

$$y = \frac{bx^2 + q}{x} + \frac{q}{b}$$ diff.

$$dy = \frac{x\,d\,(bx^2 + q) - (bx^2 + q)\,dx}{x^2}$$

$$dy = \frac{x \times (2bxdx) - bx^2dx - qdx}{x^2} = \frac{2bx^2dx - bx^2dx - qdx}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2bx^2 - bx^2 - q$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2bx^2 - bx^2 - q = 0$$

$$2bx^2 - bx^2 = q$$

$$x^2 = \frac{q}{2b - b} = \frac{q}{b} \quad \text{und} \quad x = \sqrt{\frac{q}{b}}$$

Die Breite wird also erhalten, wenn der kubische Inhalt durch die Länge dividiert, und aus dem Quotus die Wurzel ausgezogen wird. Nun muß noch die Höhe bestimmt werden.

$$\text{Es ist } a = \frac{q}{bx}$$

$$abx = q$$

$$\text{Subst. } ab\sqrt{\frac{q}{b}} = q$$

$$\text{Quad. } \frac{a^2 b^2 q}{b} = q^2$$

$$a^2 bq = q^2$$

$$a^2 b = q$$

$$a^2 = \frac{q}{b}$$

$$a = \sqrt{\frac{q}{b}}$$

Also muß man Höhe und Breite gleich machen, wenn die Foderung gelten soll. Es ist demnach in unserer Aufgabe $x = \sqrt{\frac{45000}{50}} = \sqrt{900} = 30$. Man zerfälle um 900 in was immer für zween Faktoren, so wird die Oberfläche allemal größer seyn.

Aufgaben aus arithmetischen Funktionen.

Die Juden hielten bey einem Fürsten um Duldung in seinen Landen an, und versprachen ihm, nebst einer jährlichen Abgabe von baaren 1000 fl. auch eine Kopfsteuer, vermög welcher jeder Jude alle Jahre so viele Dukaten zahlen wollte, als Köpfe geduldet werden. Die Antwort des Fürsten war: Euer Anerbiethen ist großmüthig; Ihr sollt Dul-

dung haben: und damit auch ich fürstlich handle, so verspreche ich entgegen jedem Juden, der sich in meinem Lande ansäßig macht, eine jährliche Anweisung von 100 fl. Es fragt sich nun: Wie viele Juden dörfen sich häuslich niederlassen, daß gemäß der beederseitigen Bedingung ihre Abgabe die kleinste sey?

Auflösung. Die Anzahl aller naturalisierenden Juden seyen x. Wenn der Dukaten zu 5 fl. gerechnet wird, so ist der Tribut eines Kopfes jährlich $5x - 100$; folglich aller Köpfe $(5x - 100) \times x = 5x^2 - 100x$; und mit der fixen Abgabe

$$5x^2 - 100x + 1000 = y$$

$$\text{diff.} \quad 10xdx - 100dx = dy$$

$$10x - 100 = \frac{dy}{dx} = 0$$

$$10x = 100$$

$$x = \frac{100}{10} = 10$$

Also ist die jährliche Zahlung von 10 Juden die Kleinste.

Probe. Jeder Jude müßte 10 Dukaten, das ist 50 fl. zahlen; also alle, $50 \times 10 = 500$ fl.; dieß macht mit den fixen 1000 fl. 1500 fl. Weil nun jeder Jude 100 fl. bekömmt, so bekommen alle 1000 fl.; diese abgezogen, läßt 500 fl. Setzen wir 8 Juden, so giebt einer 8 Dukaten, oder 40 fl. mithin alle $40 \times 8 = 320$ und die 1000 dazu, beträgt 1320; die 800 fl. welche sie miteinander herausbekommen, abgezogen, giebt 520; folglich um 20 fl. mehrer als vorher. Das nämliche kömmt auch heraus, wenn man 12 Juden annimmt. Kurz, man

ändere die Anzahl der Juden wie man will, so wird allemal mehr als 500 fl. zum Vorschein kommen.

Noch eine solche Aufgabe.

Ein Getraidhändler führt von München 6 Schäffel Korn weg. Setzen wir, mit jeder Meile, tiefer ins Ausland, werde auch das Münchner Schäffel um 12 kr. theurer; es steige aber auch der Lebensunterhalt, so daß er den ersten Tag $\frac{1}{2}$ fl. den zweyten 1 fl. den dritten $1\frac{1}{2}$ fl. u. s. w. verzehrte. Nun fragt es sich, wenn er täglich 6 Meilen macht, wie weit er fahren dörfe, um den größten Gewinn nach Hause zu bringen?

Auflösung. Die Meilen, wie weit er fahren dorf, sollen x heißen. Man findet demnach durch die Regel Quinque den Gewinn auf folgende Weise

Meil	Schäffl	kr.	Schäffl	Meil.
1	1	12	6	x

$$\frac{6}{72}$$

$$\frac{x}{\frac{72x}{60} = \frac{6x}{5}\text{ fl.}}$$

Nun muß natürlich auch der Unkosten abgezogen werden, der aus dem Unterhalte der Pferde und des Fuhrmanns entspringt. Weil dieß eine Progreßion giebt, deren Differenz $= \frac{1}{2}$ das erste Glied ebenfalls $\frac{1}{2}$ ist, und die Anzahl der Glieder durch die Regel Detri bestimmt werden kann, nämlich

M.	Tag	M.
6	I	X

$$n = \frac{x}{6} \text{ Tag.}$$

So ist nach der Formel $\int = an + \frac{(dn^2 - dn)}{2}$

$$\int = \frac{1}{2} \times \frac{x}{6} + \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{x^2}{36} - \frac{1}{2} \times \frac{x}{6}\right)}{2} = \frac{x}{12} + \frac{\frac{x^2}{72} - \frac{x}{12}}{2},$$

$$= \frac{x}{12} + \frac{\frac{x^2 - 6x}{72}}{2} = \frac{x}{12} + \frac{x_2 - 6x}{144}$$

$$\int = \frac{x}{12} + \frac{\left(\frac{x^2}{72} - \frac{x}{12}\right)}{2}$$

$$\int = \frac{x}{12} + \frac{\left(\frac{x^2}{72} - \frac{6x}{72}\right)}{2}$$

$$\int = \frac{x}{12} + \frac{x^2 - 6x}{144}$$

$$\int = \frac{12x}{144} + \frac{x^2 - 6x}{144}$$

$$\int = \frac{6x + x^2}{144} \text{ fl.}$$

Weil aber die Rückreise eben das kostet, als eine abnehmende Progreßion, so muß dieß doppelt genommen werden. Also der Unkosten $\frac{6x + x^2}{72}$ fl. Daher ist der ganze Gewinn, den er nach Hause bringt, und den wir y nennen wollen.

$$\frac{6x}{5} - \frac{6x - x^2}{72} = y$$

$$\frac{432x - 30x - 5x^2}{360} = y.$$

$$402x - 5x^2 = 360y$$
$$402dx - 10x\,dx = 360dy \quad \text{diff.}$$
$$402 - 10x = \frac{360\,dy}{dx} = 0$$
$$402 = 10x$$
$$40\tfrac{1}{5} = x$$

Diese Meilen zu Täge gemacht, das ist durch 6 dividiert giebt $40\frac{1}{5} = \frac{201}{30} = 6\frac{21}{30} = 6\frac{7}{10}$ Tag.

§. 52. **Anmerk.** Solche Anwendungen vom Kleinsten und Größten giebt es in der Physik, überhaupt in der angewandten Mathematik der Menge nach. Uns genügt hier den Anfängern in diesem Stücke die Bahn gebrochen zu haben, wenn sie je Muth besitzen, sich weiter in diesem noch sehr unbearbeiteten Felde, wo noch manche Erfindungen für das gemeine Leben zu machen wären, umzusehen.

Integralrechnung.

§. 53. **Erkl.** Integrieren heißt, aus einem Differentiale die Größe finden, der dasselbe zugehört.

§. 54. **Zusatz.** Es muß also gerade die umgekehrte Verfahrungsart des Differentierens beobachtet werden, wenn man ein Differential integrieren will.

§. 55. **Willk. Satz.** Das Zeichen, daß eine Größe integriert werden soll, ist eiu vorgesetztes S. Vielleicht soll es, obwohl uneigentlich, die Summe aller Differentialen bedeuten. Z. B. $S(2axdx) = ax^2$

§. 56. **Zusatz.** Wenn man allgemein jede Größe als eine Gattung von Würden ansieht, so heißt überhaupt das Gesetz zu integrieren, so: Man erhöhe den Exponenten jener Größe, wovon das simple Differential sichtbar ist, um eins, und dividiere alles durch das Produkt aus den

erhöhten Exponenten in das Differential der Radikalgröße.

§. 57. **Aufgabe.** Es sollen folgende Differentiale integriert werden. 1) $m x^{m-1} dx$ 2) $4x^3 dx$ 3) $\frac{y^2 dy}{3}$

Auflösung. 1) $S(m x^{m-1} dx) = \frac{m x^{m-1+1} dx}{(m-1+1) dx} = \frac{m x^m dx}{m dx} = x^m$

2) $S(4x^3 dx) = \frac{4 x^4 dx}{4 dx} = x^4$

3) $S\left(\frac{y^2 dy}{3}\right) = \frac{y^3 dy}{3 \times 3 dy} = \frac{y^3}{3 \times 3} = \frac{1}{9} y^3$

§. 58. **Zusatz.** Wenn manchmal die Größe selbst, wovon das simple Differential da ist, nicht zum Vorschein kömmt, so kann sie durch einen Kunstgrif ersetzt werden, welches geschieht, wenn eben diese mangelnde Größe zum Null erhoben als Faktor eingeschoben wird; indem dieß, als der Werth von eins, in einem Produkte nichts ändert.

§. 59. **Aufgabe.** Es sollen integriert werden, 1) $a dx$ 2) $dx - dy$ 3) $\frac{dv}{2} + dz - b dx$

Auflösung. 1) $S(a dx) = S a x^0 dx = \frac{a x^1 dx}{1 dx} = ax$

2) $S(dx - dy) = S(x^0 dx - y^0 dy) = \frac{x^1 dx}{1 dx} - \frac{y^1 dy}{1 dy} = x - y$

3) $S\left(\frac{dv}{2} + dz - b dx\right) = S\left(\frac{v^0 dv}{2} + z^0 dz - b x^0 dx\right) = \frac{v dv}{2 dv} + \frac{z dz}{dz} - \frac{b x dx}{dx} = \frac{1}{2} v + z - bx.$

Zu-

§. 60. **Zusatz.** Differentiale der Produkte und Quotienten veränderlicher Größen sind leicht zu kennen, weil diese wechselweise mit ihren simpeln Differentialen multipliciert sind. Sie dörfen daher nicht als abgesonderte, sondern als zusammenhangende, komplexe Größen behandelt werden.

§. 61. **Aufgabe.** Es seyen zu integrieren,

1) $xdy + ydx$ 2) $\frac{ydz - zdy}{y^2}$ 3) $xvzdy + xvydz + xzydv + vzydx$

Auflösung. 1) $S(xdy + ydx) = S(xy^0dy + yx^0dx) = \frac{xydy + yxdx}{dy + dx} = \frac{xy(dy + dx)}{dy + dx} = xy$

2) $S\left(\frac{ydz - zdy}{y^2}\right) = S\left(\frac{yz^0dz}{y^2} - \frac{zy^0dy}{y^2}\right)$

$= \frac{yzdz - zydy}{y^2(dz - dy)} = \frac{yz(dz - dy)}{y^2(dz - dy)} = \frac{yz}{y^2} = \frac{z}{y}$

3) $S(xvzdy + xvydz + xzydv + vzydx)$

$= S(xvzy^0dy + xvyz^0dz + xzyv^0dv + vzyx^0dx)$

$= \frac{xvzydy + xvyzdz + xzyvdv + vzyxdx}{dy + dz + dv + dx}$

$= \frac{xvzy(dy + dz + dv + dx)}{dy + dz + dv + dx} = xvzy$

§. 62. **Anmerk.** Zusamgesetztere Differentiale, vorzüglich mit Wurzelgrößen, lassen sich wieder am bequemsten durch Transformation integrieren. Ein Paar Beyspiele mögen den Gang der Operation erläutern. Es soll $dx\sqrt{(ax - x)}$ integriert werden.

Man setze $\sqrt{(ax - x)} = p$

$ax - x = p^2$

Diff. adx $ax - dx = 2pdp$

$dx(a - 1) = 2pdp$

$dx = \frac{2pdp}{a-1}$

aber $\frac{\sqrt{(ax-x)} = p}{dx\sqrt{(ax-x)} = \frac{2p^2dp}{a-1}}$

Intg. $S(dx\sqrt{ax-x}) = \frac{2p3dp}{(a-1)\times 3dp} = \frac{2p^3}{3a-3}$

Substit. $= \frac{2\sqrt{(ax-x)^3}}{3a-3}$

Auf eine ähnliche Art integriere man auch die Differentialgröße $dy\sqrt{my^2 - y^4}$

Weil $\sqrt{my^2 - y^4} = \sqrt{y^2(m-y^2)} = y\sqrt{m-y^2}$

so auch $dy\sqrt{my^2 - y^4} = ydy\sqrt{m - y^2}$

Nun sey $\sqrt{m - y^2} = p$

$m - y^2 = p^2$

diff. $-2ydy = 2pdp$

$+ydy = -pdp$

Aber $\sqrt{m - y^2} = p$

$\frac{ydy\sqrt{m-y^2} = -p^2dp}{S(ydy\sqrt{m-y^2}) = -\frac{p3dp}{3dp}}$

$= -\frac{1}{3}p^3$

Substit. $S(ydy\sqrt{m-y^2}) = -\frac{1}{3}\sqrt{m-y^2}^3$

§. 63. **Zusatz.** Wie es Irrationalgrößen giebt, aus denen keine vollkommne Wurzel gezogen werden kann; so giebt es auch Differentiale, die sich nie völlig integrieren lassen; man muß also in solchen

Fäl-

Fällen zur Annäherung durch Hilfe einer unendlichen abnehmenden Reihe seine Zuflucht nehmen.

§. 64. Aufgabe. Von folgenden Größen soll das Integral durch Näherung gefunden werden:

$S\left(\frac{3mdz}{a+z}\right)$ und $S\left(dy\sqrt{y^2+y}\right)$

I. Auflösung. $\frac{3mdz}{a+z} = dz\left(\frac{3m}{a+z}\right)$

Man dividiere $\frac{3m}{a+z}$ wirklich, so wird sich zeigen, daß

$$\frac{3m}{a+z} = \frac{3m}{a} - \frac{3mz}{a^2} + \frac{3mz^2}{a^3} - \frac{3mz^3}{a^4} + \frac{3mz^4}{a^5} \cdots\cdots$$

$$\times\, dz = dz$$

$$\frac{3mdz}{a+z} = \frac{3mdz}{a} - \frac{3mzdz}{a^2} + \frac{3mz^2dz}{a^3} - \frac{3mz^3dz}{a^4} + \frac{3mz^4dz}{a^5}$$

$$S\left(\frac{3mdz}{a+z}\right) = \frac{3mz}{a} - \frac{3mz^2}{2a^2} + \frac{3mz^3}{3a^3} - \frac{3mz^4}{4a^4} + \frac{3mz^5}{5a^5} \text{ u. s. f.}$$

II. Auflösung. $dy\sqrt{y^2+y} = dy \times (y^2+y)^{\frac{1}{2}}$

Nun ist $(y^2+y)^{\frac{1}{2}} = y + \frac{1}{2} - \frac{1}{8y} - \frac{1}{16y^2} - \frac{5}{128y^3} \cdots$

$$\times\, dy = dy$$

$$dy(y^2+y)^{\frac{1}{2}} = ydy + \frac{dy}{2} - \frac{dy}{8y} - \frac{dy}{16y^2} - \frac{5dy}{128y^3}$$

$$S\left(dy\sqrt{y^2+y}\right) = \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} - \frac{y}{8y} - \frac{y}{16y^2} - \frac{5y}{128y^3}$$

$$= \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16y} - \tfrac{5}{128y^2} \text{ u. s. f.}$$

§. 65. Zusatz. Wenn eine Wurzelgröße mehr als zwey Glieder hat, so setzt man, wie bey der Würdenlehre gezeigt worden, mehrere Größen einer einzigen gleich, um zwo Glieder zu bekommen. Sind um diese gehörig erhoben, so kann wieder nach Erheischung des Kalkuls substituiert werden.

§. 66. Zusatz. Es ist auch einleuchtend, daß die unendliche Reihe so eingerichtet werden müße, daß die Glieder immer abnehmen; denn je schneller die Reihe sich ihrer Gränze nähert, desto genauer wird die Rechnung ausfallen.

§. 67. Anmerk. Beständige Größen, die beym Differentiern weggefallen sind, werden nach der Integration durch ein angehängtes $\pm$ C, d. i. $\pm$ Constans, vorgestellt, und lassen sich aus den Umständen der Rechnung leicht wieder bestimmen.

Einige vorläufige Anwendungen der Integralrechnung.

§. 68. Lehrsatz. Der pythagorische Lehrsatz läßt sich sehr kurz und gründlich durch Hilfe der Integralrechnung erweisen.

Satz.

$$ab^2 + bd^2 = ad^2$$

Beweis.

Man werfe Fig. 5. um das rechtwinklichte Dreyeck einen halben Zirkel, so wird die Hypothenuse zum Diameter, und die beyden Lothen zu Sehnen des Zirkels. Weil nun der Diameter eine beständige Größe, und die Sehnen Funktionen voneinander sind, von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine

bey

bey Beybehaltung des rechten Winkels wächst, die andere abnimmt, so heiße man den Diameter = a und die Sehnen = x und = y. Es ist nun aus den Gründen der Geometrie. §. 167. erster Fall

$$af \times fc = bf \times fd$$

Subst. $x \times dx = y \times -dy$

Abgek. $x\,dx = -y\,dy$

Integ. $\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2}$

X 2 $x^2 = -y^2 + C$

oder $x^2 = C - y^2$

Um die Konstante zu finden, dörfen wir nur die Gleichung für den Fall anwenden, wo x durch lauter Wachsthümer zu a, und eben darum y zu Null wird. Also verwandelt sich die Gleichung in diese

$$a^2 = C - o$$

d. i. $a^2 = C$

Folglich ist die Konstante die Hypothenuse selbst. Nun in der ursprünglichen Gleichung $x^2 = C - y^2$ substituiert, giebt

$$x^2 = a^2 - y^2$$

verf. $x^2 + y^2 = a^2$

oder $ab^2 + bd^2 = ad^2$

§. 69. Erkl. Der beginnende oder sich entwickelnde Theil einer Linie, in so fern sie wachsend vorgestellt wird, kann, im strengsten Sinne genommen, kein Punkt seyn. Der beginnende Theil einer Fläche, eben so wenig eine Linie, und der eines Körpers, eine Fläche seyn; sondern er ist nothwendig im ersten Falle selbst eine kleine Linie; im zweyten selbst eine solche Fläche, und im dritten

ebenfalls ein solches Körperchen. Man nennt dieß das Element einer Linie, einer Fläche eines Körpers.

§. 70. Zusatz. Wenn in einem Zirkel Fig. 6. neben einer perpendikulären Halbsehne g b eine andere h d unendlich nahe gezogen wird, so giebt das Differential des Perpendikels h d, welches h k = d y ist, und das Differential des Segments b c (wir wollen dießmal die Segmente vom Mittelpunkte aus rechnen) welches — b d = — g k = — d x ist mit der unendlich kleinen krummen Linie g h, ein rechtwinklichtes Dreyeckchen, worinn g h, wegen ihrer unendlichen Kleinheit für eine gerade Linie gelten kann. Es ist demnach

$$gh^2 = gk^2 + hk^2$$
$$= (-dx)^2 + dy^2$$
$$= dx^2 + dy^2$$
$$gh = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

das Element der Zirkellinien und andrer derley krummen Linien; weil dieß in allen Punkten, also auch im Anfangspunkte des Zirkels, oder jeder Kurve ist.

§. 71. Erkl. Rektificieren heißt eine gerade Linie finden, die einer andern krummen gegebnen an Länge entweder vollkommen gleich ist, oder ihr so nahe als möglich kömmt.

§. 72. Aufgabe. Ein Stück der Zirkellinie z. B. einen Quadranten zu rektificieren.

Auflösung. Es ist im Zirkel Fig. 4. wenn der Radius für Eins angenommen wird.

$$ab^2 = db \times bh$$

Allein
$$db = 1 - bc$$
$$bh = 1 + bc$$

$db \times bh = 1 - bc^2$ subst. $ab^2 = 1 - bc^2$

und weil $bc = x$

$ab = y$

$y^2 = 1 - x^2$

Wenn nun diese Gleichung differenziert, und in selber der Werth für das obige Kurvaelement gefunden, und gehörig integriert wird, so hat man einen Ausdruck für jedes Stück der Zirkellinie, das einem angenommenen x entspricht. Wird $x = 1$ so ist eben darum ein ganzer Quadrant rektificiert, welche Rektifikation in einer abnehmenden unendlichen Reihe ausgedrückt ist. Nun zur Sache

$$y^2 = 1 - x^2$$

diff. $2ydy = -2xdx$

2: $ydy = -xdx$

quad. $y^2 dy^2 = x^2 dx^2$

div. durch $y^2 = 1 - x^2$

$$dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{1 - x^2}$$

$$+ dx^2 \qquad + dx^2$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{1 - x^2} + dx^2.$$

$$= dx^2\left(\frac{x^2}{1 - x^2} + 1\right) = dx^2\left(\frac{x^2 + 1 - x^2}{1 - x^2}\right).$$

$$= dx^2\left(\frac{1}{1 - x^2}\right)$$

$$\surd \quad \surd \overline{dx^2 + dy^2} = dx\left(\surd \frac{1}{(1 - x^2}\right),$$

$$= dx\left(\frac{1}{(1 - x^2\ \frac{1}{2}}\right) = dx\left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= dx\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + \frac{35x^8}{128}..\right)$$

$$= dx + \frac{x^2\,dx}{2} + \frac{3x^4\,dx}{8} + \frac{5x^6dx}{16} + \frac{35x^8dx}{128}$$

$$S\surd(dx^2 + dy^2) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9..}{1152}$$

Wird nun $x = 1$ das ist, gleich dem Radius angenommen, so heißt der Ausdruck für einen integrierten Quadranten $1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \frac{5}{112} + \frac{35}{1152}..$ Und weil 4 Quadranten dem Zirkel selbst geben. $4 + \frac{4}{6} + \frac{12}{40} + \frac{20}{112} + \frac{140}{1152}.. = 4 + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} + \frac{5}{28} + \frac{35}{288}$

§ 73. **Anmerk.** Das schlimste bey dieser Reihe ist, daß die Glieder so langsam abnehmen. Man müßte also, um die Zirkellinie zu rektificieren, einige hundert Glieder berechnen, und zusammaddieren; denn die ersten 3 Glieder enthalten nicht einmal 5 Radiusse, da doch andere Rektifikationen über 6 derselben geben; folglich muß noch mehr als ein ganzes in der fortgeführten Reihe stecken; aber wie lang dörfen so geringhaltige Brüche, die über dieß noch immer abnehmen, fortgesetzt werden, bis das Verlangte erhalten wird? geschweigens erst von einer Approximation zu reden, welche uns in etwas zufrieden stellen könnte.

Schneller fällt die Reihe zusammen, wenn man annimmt, daß der Perpendikel y dem halben Radius gleich sey. Weil der Perpendikel einen Sinus vorstellt, und weil in der Trigonometrie erwiesen worden, daß dem halben Radius als Sinus ein Bogen von 30° entspreche, welcher den dritten Theil des Quadranten ausmacht, so erhält man, wenn der gehörige Werth für x substituiert wird, $\frac{2}{3}$ vom Quadranten, oder den 6ten Theil der Periphere, der dem x als Kosinus gerade gegen-

gegenübersteht, rektificiert, indem sich die Rektification vom Sinustotus rückwärts anfängt, und bis zum Sinus reichet. Man findet aber x so:

$$y^2 = 1 - x^2$$

aber $y = \frac{1}{2}$ und eben darum auch

$$y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = 1 - x^2$$
$$x^2 + \frac{1}{4} = 1$$
$$x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Diesen Werth nun in der Reihe substituiert giebt.

$$S\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{27}}{6\times8} + \frac{3\sqrt{243}}{32\times40} + \frac{5\sqrt{2187}}{112\times128} + \frac{35\sqrt{19683}}{1152\times512} \ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\text{Circ.}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{27}}{48} + \frac{3\sqrt{243}}{1280} + \frac{5\sqrt{2187}}{14336} + \frac{35\sqrt{19683}}{589824} \ldots\ldots$$

$$\times 6 \quad \text{Circ.} = \frac{6\sqrt{3}}{2} + \frac{6\sqrt{27}}{48} + \frac{18\sqrt{243}}{1280} + \ldots$$

$$\text{Circ.} = 3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{27}}{8} + \frac{9\sqrt{243}}{640} + \ldots$$

Wenn man hier nun etliche Glieder bearbeitet, und ihre Resultate addiert, so erhält man sehr bald 6, 28.... Folglich in Diametern 3, 14....

§. 74. Aus-

§. 74. **Anmerk.** Leibnizens Rektification durch Hilfe der Tangente von 45° gewährt eine Reihe, die noch weit schneller zusammenfällt. Man sehe hierüber Kästners Analyse oder Klemms Lehrbuch S. 425.

§. 75. **Erkl.** Eine krumme Linie quadrieren, heißt die Fläche finden, die von derselben entweder ganz begränzt, oder doch wenigst bestimmt wird.

§. 76. **Aufgabe.** Man soll die allgemeine Quadratur des Zirkels durch Näherung finden.

Auflösung. Man suche allererst das Flächendifferential des Zirkels. Es sey nämlich ein Perpendikel oder Sinus Fig 6. so nahe an den andern hingezogen, als möglich ist, so werden sie ein unendlich kleines Parallelogram geben, welches zur Grundlinie $hd = y$ und zur Höhe $bd = dx$ hat. Folglich ist das Flächenelement des Zirkels so wie jeder derley krummen Linie $y \times dx = ydx$. Hat man nun in der Gleichung des Zirkels ein Aequivalent dafür gefunden, und integriert, so ist ein Stück des Zirkels, das zwischen einem gewiesen Sinus, seinem Kosinus und Sinustotus liegt, wirklich quadriert. Weil der Sinus durch y und der Kosinus durch x ausgedrückt worden, so setze man $x = 1$ so wird $y = 0$ und das quadrierte Stück eben darum ein Quadrant seyn. Es ist demnach in Zirkel wie oben.

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$y = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int dx \quad y\,dx = dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= dx\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{x^8}{128} \ldots\right)$$

$$ydx = dx - \frac{x^2\,dx}{2} - \frac{x^4\,dx}{8} - \frac{x^6\,dx}{16} - \frac{5x^8\,dx}{128} \ldots\ldots$$

$$S(y\,dx) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} - \frac{5x^9}{1152} \ldots$$

$x = r = 1$ gesetzt

$$S(y\,dx) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} \ldots$$

Eine Reihe welche schnell zusammfällt; wenn sie nun durch 4 multipliciert wird hat man den ganzen Zirkel; also

$$\square\,\text{Circ.} = 4 - \frac{4}{6} - \frac{4}{40} - \frac{4}{112} - \frac{20}{1152} \ldots$$
$$= 4 - \frac{2}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{28} - \frac{5}{288} \ldots$$

Und wenn man etliche Glieder nach der Dezimalrechnung bearbeitet, und vom ersten Gliede 4 abziehet, so bekömmt man 3, 14. . . .

§. 77. Zusatz. Es enthält also der Zirkel gerade so viel Radiusquadrate in der Fläche, als viel Diameter die Peripherie in der Länge enthält.

§. 78. Zusatz. Die obige Reihe $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \ldots$ ist folglich auch dem Inhalt nach, noch so groß als $x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{112} - \ldots$

§. 79. Erkl. Kubieren heißt den Inhalt eines Körpers finden, der von einer krummen Fläche entweder ganz oder zum Theil begränzt ist.

§. 80. Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines geradstehenden Kegels allgemein zu bestimmen.

Auflösung. Man bestimme vor allen das Körperelement. Wenn Fig. 7. die Höhe des Kegels x heißt, so ist jeder kleinstmöglichste Wachsthum derselben dx. Da ferner der Durchmesser eines jeden Kegelburchschnitts, der mit der Basis parallel läuft, eine veränderliche Größe ist, so mag er y heißen, folglich ist ein solcher Zirkel $\frac{y^2 \pi}{4}$ Man nehme endlich, wo man will, im Kegel zwo solche unendlich nahe Zirkelflächen an, so werden diese, als ein unendlich niedrer Zylinder, der nämlich dx zur Höhe hat, das Körperelement enthalten, und sich durch $\frac{y^2 \pi dx}{4}$ ausdrücken lassen, weil dieß das Produkt der Grundfläche in die Höhe ist.

Gem. 9206.

Nun mache man eine Gleichung für irgend eine Eigenschaft des Kegels ausfindig. Es ist z. B. in selbem wegen dem Parallelismus.

$$af : ah = bc : gl$$

heißt aber $ah = a$ und $gl = b$ so ist nach der Substit. x;

$$a = y : b$$
$$ay = bx$$
$$y = \frac{bx}{a}$$

$$\frac{\pi y\, dx}{4} x \qquad \frac{\pi y^2 dx}{4} = \frac{b \pi y x dx}{4^2}$$

Für

Für y in der zwoten Seite der Gleichung seinen Werth $\frac{bx}{a}$ substituiert.

Giebt $\frac{\pi y^2 dx}{4} = \frac{b^2 \pi x^2 dx}{4a^2}$

$S\left(\frac{\pi y^2 dx}{4}\right) = \frac{b^2 \pi x^3}{12a^2}$ Man lasse x so lange wachsen, bis es $= a$ wird, so ist

$S = \frac{b^2 \pi a^3}{12a^2} = \frac{b^2 \pi a}{12}$

oder $S = \frac{b^2 \pi}{4} \times \frac{a}{3}$. Wenn nun die Grundfläche $\frac{b^2 \pi}{4} = B$ ist, so giebt die Kubatur des Kegels $B \times \frac{a}{3}$. Das heißt, das Produkt der Grundfläche in den dritten Theil der Höhe.

§. 81. Anmerk. Ich versprach in der Stereometrie §. 225, hier einen algebraischen Beweis von dem Satze zu geben, daß die Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Höhe und Grundfläche sey; oder was eins ist, daß dessen Inhalt der dritte Theil des Produktes aus der Grundfläche in dessen Höhe ausmache. Weil dieß aber in der Elementargeometrie unmittelbar vom Kegel weit schwerer läßt, so glaube ich um so mehr, hier Wort gehalten zu haben, da ich geradezu den obbemeldten Satz vom Kegel erwies.

§. 82. Anmerk. Man merke sich vorzüglich die drey Elemente, weil sie in der höhern Geometrie öfters genutzt werden. Das Linienelement ist demnach $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Das Flächenelement, $y\,dx$ und das Körperelement. $y^2 \pi dx$. Das Oberflächenelement werden wir später kennen lehrnen.

Höhere Geometrie.

§. 1. Erklärung.

Die höhere Geometrie untersucht die Natur, und die Gesetze der krummen Linien, vorzüglich derjenigen, die sich durch Ebnen aus Kegeln ausschneiden lassen.

§. 2. **Zusatz.** Die Gesetze aber, nach welchen eine krumme Linie beschrieben ist, lassen sich größtentheils nur durch Hilfe gerader Linien bestimmen, derer Beschaffenheiten (affectiones) gegen einander uns schon genugsam aus der Elementargeometrie bekannt seyn müssen. Sie haben hier verschiedene Namen, als Ordinaten, Abscissen, Achsen, Durchmesser, Tangenten, Subtangenten, Normal- und Subnormallinien u. s. f.

Vorbegriffe der nothwendigsten Hilfslinien.

§. 3. **Erkl.** Wenn zu einer krummen Linie eine gerade, wo immer gezogen wird, so heißt der

Ab-

Abstand eines jeden Punktes der Kurve von einem Punkte der geraden Linie eine Ordinate, welche ebenfalls durch eine andere gerade Linie ausgedrückt wird. Ist der Abstand eines Punktes der Kurve von der geraden Linie der kürzeste unter allen, die von diesen Punkte möglich sind, so nennt man die Ordinate rechtwinklicht, welche auch immer am gewöhnlichsten vorkömmt. Ein abgeschnittnes Stück der geraden Linie von einem bestimmten Anfangspunkt an gerechnet, wird Abscisse genannt; und die Linie selbst worauf die Abscissen abgeschnitten werden, heißt Abscissenlinie. So sind Fig. 8. ad, gb, fc Ordinaten; ab, ac Abscissen, und ak die Abscissenlinie.

§. 4. Zusatz. Je mehr nun Ordinaten gezogen, und je genauer selbe sammt ihren Abscissen gemessen werden, desto richtiger wird auch das Gesetz angegeben, nach welcher so eine krumme Linie beschrieben ist.

§. 5. Erkl. Wenn die Kurve eine merkliche Höhlung bildet, oder gar in sich zurückkehrt, so, daß man bequem von jedem Punkt zum andern gerade Parallellinien ziehen kann, welche alle rechtwinklicht in zween gleiche Theile zu theilen eine andere gerade Linie in Stande ist, so heißt diese letztere Linie die Achse der Kurve, und dient zugleich für die Abscissenlienie. Im Zirkel thut dieß der Diameter, Fig. 9. folglich ist derselbe nach der Sprache der höhern Geometrie die Achse des Zirkels, jeder Perpendikel darauf eine Ordinate, und die Segmente der Achse — Abscissen.

§. 6.

§. 6. **Willk. Satz.** Weil die Ordinaten, und Abscissen Funktionen von einander sind, welche oft unter dem Namen Koordinaten begriffen sind, so werden sie im Kalkul durch die letzten Buchstaben des Alphabets ausgedrückt. Gemeiniglich bedeutet y eine Ordinate und x seine Abscisse.

§. 7. **Anmerk.** Die Alten nannten die ganzen Linien, von einem Punkte der Kurva bis zum andern, Ordinaten, und ihre Hälften, von der Kurve bis zur Achse, Semiordiaten. Die Neuern aber, welche meist nur die Hälfte einer solchen krummen Linie betrachten; weil die andere Hälfte, wegen der Gleichheit, die nämlichen Eigenschaften haben muß, nur, daß in Rücksicht der entgegengesetzten Lage, wie schon einestheils vom Zirkel in der Trigonometrie gemeldet worden, die Semiordiaten negativ sind, heißen diese Hälften schlechtweg Ordinaten, und wenn je von den ganzen Ordinaten irgend die Rede ist, werden selbe von ihnen Doppelordinaten genennt.

§. 8. **Erkl.** Aus dem Verhältnissen der Ordinaten zu ihren Abscissen werden mit Zuziehung einer oder mehrern beständigen Größen Gleichungen formiert, die die Gleichungen für die krummen Linien heißen. So wäre die für den Zirkel: $y^2 = x(a - x) = ax - x^2$, wo a die Achse bezeichnet. Die Kurven nun, bey welchen das angeht heißen algebraisch; die übrigen, woraus sich keine Gleichung erheben läßt, trauscendentisch. Bey einer schneckenartig gewundnen Linie thun Ordinaten und Abscissen keine guten Dienste; folglich ist es auch nicht wohl möglich, für sie eine Gleichung ausfindig zu machen. Sie wird daher mit Recht zu den transcendentischen Linien gerechnet.

Die algebraischen Linien werden ferner eingetheilt in Geschlechter oder Ordnungen, und endlich noch in Familien. Die Geschlechter werden nach

der

der Anzahl der Abmessungen, die in den Gleichungen der Linien vorkommen, benennet, zwo Abmessungen geben eine Linie von der ersten Ordnung oder Geschlecht: drey von der zwoten u. s. f. Zu ein und der nämlichen Familie gehören endlich alle Linien, deren Gleichungen so aussehen, daß überall die nämlichen Glieder obwalten, wenn sie auch gleich in ihren Exponenten verschieden sind.

Z. B. $z^2 = av$ und $y^2 = bx$ gehören zu einem Geschlechte; weil überall zwo Abmessungen statt haben. $\xi^3 = c^3x^2$ und $\xi^2 = (c - x)x$ sind aber von einer Familie.

§. 9. Erkl. Die Tangente ist, wie in der Geometrie beym Zirkel, eine gerade Linie, die die Kurve in einem einzigen Punkte berührt; aber sie hat hier wieder, wie in der Trigonometrie, eine gewiße Länge, und wird so weit auf einer Seite fortgezogen, bis sie die verlängerte Abscisse erreicht, welche der Ordinate des Berührungspunkts entspricht. Diese verlängerte Abscisse ist die Subtangente. Ein aus der Abscissenlinie auf den Berührungspunkt der Tangente hingefällter Perpendikel heißt die Normallinie. Das Stück endlich der Abscissenlinie zwischen der Ordinate des Berührungspunktes und der Normal wird die Subtangente genennt. So ist im Zirkel Fig. 10, a m die Tangente, a p die Subtangente, m q die Normal, welche im Zirkel allemal der Radius selbst ist, wie aus der Elementargeometrie bekannt ist, und p q die Subnormal, welche Linien alle bey jeder krummen Linie auf eine ähnliche Art gezogen werden.

Von

Von Kegelschnitten.

§. 10 **Erkl.** Jeder Kegel läßt sich durch eine unebne Fläche unzählige Mal; durch eine ebne Fläche aber nur fünfmal schneiden, als

1) durch die Achse des Kegels, welches ein Dreyeck giebt, und folglich in die Elementargeometrie gehört, wie Fig. 11. lhs;

2) parallel mit der Grundfläche des Kegels, wo der Schnitt ein Zirkel wird, der ebenfalls schon größtentheils in der Elementargeometrie abgehandelt worden, z. B. a b c;

3) parallel mit einer Seitenlinie des Kegels, wodurch die erste Linie der höhern Geometrie entsteht, welche den Namen der Parabel hat; als h g k,

4) parallel mit der Achse des Kegels, in welchen Fall man mehrmals eine krumme hieher gehörige Linie erhält, die Hyperbel heißt, nämlich v d f

5) endlich durch einen Schnitt, der weder mit einer Seite, weder mit der Grundfläche noch mit der Achse parallel läuft, der die Ellipse giebt, wie p m q.

§. 11. **Anmerk.** Die Ursache der Benennungen der drey leztern Kegelschnitte; denn die übrigen kommen hier alle nicht in Betracht, werden wir weiter unten bey jeder dieser Linie angeben;

Von der Parabel.

§. 12. **Lehrsatz.** In der Parabel ist überall das Quadrat der Ordinate gleich dem Produkt der Abscisse in eine bestimmte beständige Größe, die

so-

sowohl hier, als in denen übrigen beyden Linien der Parameter genannt, und durch seinen Anfangsbuchstaben p ausgedrückt wird.

Satz.

$$y^2 = px$$

Beweis.

Man zeichne diese krumme Linie in einem Kegel Fig. 12., und schneide durch einen Zirkel, der mit der Grundfläche des Kegels parallel geht, die Parabel, wo man will, so kann der Diameter des Zirkels so gezogen werden, daß eine gemeinschaftliche Ordinate des Zirkels, und der Parabel rechtwinklicht auf einen gemeinschaftlichen Punkt der beyden Achsen fällt. Es ist nun aus der Eigenschaft des Zirkels

$$pm^2 = cp \times pb.$$

Man suche nun für cp und pb andere Werthe, welches geschehen kann, wenn von dem Scheitel der Parabel — so heißt der Anfangspunkt eines Kegelschnitts — eine Parallellinie mit der Achse des Zirkels bis an die andere Seitenlinie gezogen wird. Es ist daher $cp = da$ wegen Parallelismus. Ferner ist aus gleichem Grunde,

$\triangle dfa \backsim \triangle apb$ wegen innern und äußern Winkeln.

daher $df : da = ap : pb$

$$\frac{da \times ap}{df} = pb$$

In der obigen Gleichung substituiert, giebt

$$pm^2 = \frac{da \times da \times ap}{df} = \frac{da^2}{df} \times ap$$

Da aber der Quotus wegen den beständigen Größen da und df ebenfalls beständig ist, und p heißen kann, gleichwie die Ordinate pm durch y und die Abscisse ap durch x ausgedruckt wird, so ist es nach der Substitution.

$$y^2 = px$$

§. 13. **Anmerk.** Der Name Parabel (παραβολη) kömmt von der völligen Gleichheit des Quadrats der Ordinate und des Produkts aus der Abscisse in den Parameter her. In der Ellipse wird, wie wir in der Folge sehen werden, etwas davon abgehen, daher ελλειψις (Mangel) und in der Hyperbel hingegen ein Ueberfluß vorhanden seyn, welches ebenfalls das Wort υπερβολη ausdrückt.

§. 14. **Zusatz.** Es ist daher der Parameter die dritte Proportionallinie zur Abscisse und Ordinate, weil die Gleichung $y^2 = px$ in diese stätige Proportion $x : y : p$ aufgelöset werden kann. Er läßt sich demnach in einer gegebnen Parabel leicht durch Zeichung als eine einzige beständige Linie sichtbar machen. Man beschreibe nur Fig. 13. auf der Achse einen halben Zirkel, der durch dem Scheitelpunkt geht, und ziehe aus jenem Punkt der Parabel, wo sie der Zirkel schneidet, eine Ordinate, so ist das erste Segment der Zirkelachse die Abscisse und das zweyte der Parameter, weil nur in diesem Falle $y^2 = xp$ seyn kann.

§. 15. **Lehrsatz.** Der Parameter ist auch gleich dem Produkte aus der Summe was immer für zwoer Ordinaten, in ihre Differenz, wenn es durch die Differenz ihrer Abscissen dividiert worden.

Satz.

$$\frac{(Y + y)(Y - y)}{X - x} = p$$

Be-

Beweis.

$$(Y + y) \times (Y - y) = Y^2 - y^2$$

aber $Y^2 = pX$

und $y^2 = px$

subst. $(Y + y) \times (Y - y) = pX - px = p(X - x)$

$$: (X - x) \quad \frac{(Y + y) \times (Y - y)}{X - x} = p$$

§. 16. Zusatz. Weil die Gleichung für die Parabel von der ersten Ordnung ist, folglich zwo Abmessungen hat; denn es wird nach Ausziehung der Wurzel $y = \pm \sqrt{px}$, so kann die Ordinate positiv und negativ seyn: das heißt, jede Abscisse hat in der Parabel zwo gleiche entgegengesetzte Ordinaten.

§. 17. Zusatz. Die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die Abscissen; denn weil in jedem Punkt der Parabel

$y^2 = px$ seyn muß

so ist auch $Y^2 = pX$

$y^2 : Y^2 = px : pX$

$y^2 : Y^2 = x : X \quad : p$

§. 18. Zusatz. Die Parabel ist keine in sich zurückkehrende Linie, wie der Kreis; denn wäre sie es, so müßte sich in dem Fall, wenn die Ordinate zu Null wird, noch ein wahrer positiver Werth für die Abscisse finden lassen, wie in der Gleichung für den Zirkel.

Dort ist $y^2 = ax - x^2$

$y^2 = o$

$o = ax - x^2$

$x^2 = ax$ und $x = a$, wo die Abscisse der ganzen Achse gleicht. Hier aber in $y^2 = px$, wenn für y, folglich auch für $y^2 = o$ gesetzt wird giebt es $o = px$

$: p \quad o = x$. Das ist, die Achse der Parabel wird nur im Anfang, und dann nicht mehr geschnitten; denn da trifft es zu, daß wenn $y = o$ auch $x = o$ bleibt; und umgekehrt, wenn $x = o$ so wird auch $y = o$ seyn.

§. 19. **Anmerk.** Man könnte dieß auch daraus beweisen, weil es in der Parabel keine größte Ordinate, wie im Kreise giebt. Denn man verfahre mit der Gleichung auf eine ähnliche Art, wie §. 50 mit der des Zirkels.

$y^2 = px$

diff. $2ydy = pdx$

$dy = \frac{pdx}{2y}$

$dx : \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$

$\times 2y \quad o = \frac{p}{2y}$

so ist $o = p$. Also würde die Parabel nur in dem Fall eine größte Ordinate verstatten, wenn sie keinen Parameter hätte, das heißt, wenn sie keine Parabel wäre, welches ein baarer Widerspruch ist.

§. 20. **Zusatz.** Es wachsen demnach die Koordinaten, als Funktionen von einander, bis ins Unendliche fort.

§. 21.

§. 21. **Erkl.** Jener Punkt auf der Achse der Parabel, und eines jeden Regelschnitts, wo der halbe Parameter die Ordinate abgiebt, wird der Brennpunkt, und die Abscisse Brennweite, Fokallänge genannt; die Ursache dieser Benennung wird in der Katoptrick angegeben.

§. 22. **Lehrsatz.** Die Brennweite in der Parabel, ist dem 4ten Theil des Parameters gleich.

Voraussetzung.

$$y = \frac{1}{2} p$$

Satz.

$$x = \frac{1}{4} p$$

Beweis.

In jedem Punkt der Parabel ist.

$$y^2 = p\,x$$

aber $y = \frac{1}{2} p$

also $y^2 = \frac{1}{4} p^2$

$$p\,x = \frac{1}{4} p^2$$

$\div p$

$$x = \frac{1}{4} p$$

§. 23. **Aufgabe.** Eine Parabel geometrisch zu beschreiben.

Auflösung. Man ziehe Fig. 14. eine Achse von unbestimmter Länge, schneide von einem angenommenen Scheitelpunkt 5 beliebige gleiche Theile ab, und werfe einen halben Zirkel darüber, so wird die

Ordinate auf dem ersten Theilungspunkte, der halbe Parameter, der erste Theil selbst, die Fokallänge, und die lezten vier Theile zusammengenommen, der Parameter p seyn; Denn

$$\text{oder } mp^2 = ap \times pd \quad \text{weil } mp = y$$
$$y^2 = xp \qquad ap = x$$
$$\text{oder } y^2 = 1 \times 4 = 4 \quad \text{und } pd = p$$
$$y = 2, \text{ d. i. } \tfrac{1}{2}p$$

Wenn nun mehrere Halbzirkel von verschiedner Größe auf der Achse beschrieben werden, die sich im Scheitel einander berühren, so sind alle Ordinaten, die man in der Entfernung des Parameters von den verschiednen Endpunkten der Zirkelachsen zieht, gemeinschaftliche Ordinaten der Parabel, weil überall $y^2 = px$ ist.

§. 24. **Lehrsatz.** Zwo Sehnen (chordæ) vom Scheitel der Parabel ausgezogen, verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Produkten der zugehörigen Abscissen in die Summe eben dieser Abscissen und des Parameters.

Satz. Fig. 19.

$$c : C = \sqrt{x(x+p)} : \sqrt{X(X+p)}$$

Beweis.

Es ist $c^2 = x^2 + y^2$
eben so wie $C^2 = X^2 + Y^2$

$$c^2 : C^2 = (x^2 + y^2) : (X^2 + Y^2)$$
aber $y^2 = px$
und $Y^2 = pX$
subst. $c^2 : C^2 = (x^2 + px) : (X^2 + pX)$
oder $= x(x+p) : X(X+p)$
$\surd$ $c : C = \sqrt{x(x+p)} : \sqrt{X(X+p)}$

§. 25.

§. 25. **Lehrsatz.** Die Entfernung eines jeden Punktes der Parabel vom Brennpunkt, oder der Brennstrahl ist gleich der entsprechenden Abscisse sammt der Fokallänge.

Satz. Fig. 15.

$$mf = x + \tfrac{1}{4}p$$

Beweis.

$$mf^2 = fp^2 + mp^2$$

subst. $mf^2 = (x - \tfrac{1}{4}p)^2 + y^2$

und weil $y^2 = px$

$$mf^2 = x^2 - \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{16}p^2 + px$$

abgek. $mf^2 = x^2 + \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{16}p^2$

$$mf = x + \tfrac{1}{4}p$$

§. 26. **Zusatz.** Daraus folgten wieder einige Arten Parabeln zu beschreiben. Sie alle anzuführen wäre zu weitläuftig, da sie ohnedem in den meisten mathematischen Lehrbüchern anzutreffen sind.

§. 27. **Aufgabe.** Durch einen gegebnen Punkt der Parabel eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe Fig. 16. den Brennstrahl auf den gegebnen Punkt hin, ferner von diesen Punkt aus eine Parallellinie mit der rückwärts verlängerten Achse, und theile den Winkel welchen der Brennstrahl und die Parallellinie macht, in zween gleiche Theile, so wird die Theilungslinie, wenn man sie so lange fortzieht, bis selbe die verlängerte Achse erreicht, die verlangte Tangente seyn.

Beweis.

Zu einer Kurve nur in nicht schneide. Tangente wird erfodert, daß sie die einem einzigen Punkt berühre, und Schnitte sie allenfalls die Kurve, so müßte noch ein Punkt dieser geraden Linie, weil sie doch wenigst eine tangentenartige Lage hätte, früher oder später in der Parabel liegen, wenn man beyde weit genug verlängert. Daß aber dies nicht seyn könne, wird so erwiesen. Man schließe den getheilten Winkel vom Brennpunkt an, zu einem gleichschenklichten Dreyeck. Folglich ist auch diese Schlußseite rechtwinklicht in zween gleiche Theile getheilt. Endlich ziehe man von dem Endpunkt des äußern Schenkels eine Parallellinie mit der Ordinate bis an die verlängerte Achse. Es ist nun aus der Konstruktion.

$$\begin{array}{l} dm = fm = x + \frac{1}{4} p \\ dm = bq = ba + x \end{array}$$

$$x + \tfrac{1}{4} p = ba + x \quad \text{und abgek.}$$

$$\tfrac{1}{4} p = ba$$

Wenn nun z. B. o ein Punkt in der Parabel wäre, so müßte auch $fo = x + \frac{1}{4} p$ seyn. Aber dieß ist unrichtig; Denn

$$no = br = ba + ar = \tfrac{1}{4} p + x$$

Allein $no < do$ als Kathet und Hypothenus; setzen wir es sey no um z kleiner als do

folglich $no = do - z$

$$\tfrac{1}{4} p + x = do - z$$

Aber $do = fo$; denn das Dreyeck fdo ist gleichschenklicht, weil der Perpendikel oc die Grundlinie fd in gleiche Theile theilt.

subst.

subst. $\frac{1}{4}$ p + x = fo — z Welches der Eigen-
$\frac{1}{4}$ p + x + z = fo schaft des Brennstrahls der Parabel widerspricht. Den nämlichen Widerspruch findet man auch, wenn ein Punkt oberhalb der Berührung angenommen wird. Es ist also vollkommen erwiesen, daß t m eine wahre Tangente sey.

§. 28. Zusatz. Die Tangentialwinkel, das heißt jene Winkel, die der Brennstrahl, und die verlängerte Parallellinie mit der Tangente machen, sind einander gleich; denn es ist Fig. 16.

x = y wegen der Theilung.

s = y als Vertikalw.

Also = x = s

§. 29. Anmerk Es ist ein in der Physik erwiesener Satz, daß der Ausfallwinkel eines irgendwo abgeprellten Lichtstrahls eben so groß sey, als der Einfallwinkel. Wenn man nun eine genau verfertigte, und gut polierte Paraboloide, d. i., einen Körper, dessen innere Höhlung von der Umwälzung einer Parabel um ihre Achse gebildet worden, so gegen die Sonne hält, daß alle Strahlen parallel mit der Achse einfallen, so müssen sie sich sämmtlich im Brennpunkte vereinigen, und hier nach der Größe eines solchen parabolischen Brennspiegels eine ausserordentliche Hitze verursachen. Denn die Richtung eines jeden Punkts der Paraboloide stellt dessen Tangente vor; also würde der Strahl unter dem nämlichen Gesetz auf der Tangente abprellen, wie auf dem ihr korrespondierenden Parabelpunkte. Da aber die Tangentialwinkel, d. i., der Ein- und Ausfallwinkel des Strahls neben ihrer erwiesnen Gleichheit auch noch die Eigenschaft haben, daß ein Schenkel parallel mit der Achse fortläuft, und der andere zum Brennstrahl wird, so müssen nothwendig alle parallel einfallenden Strahlen auf den Brennpunkt hingeleitet, und dort vereiniget werden.

Umgekehrt läßt sich auch aus den nämlichen Gründen behaupten, daß ein in Brennpunkt gestellter leichtender Körper alle davon ausgehenden Strahl parallel mit der Achse fort-

fortpflanze, wie die aus Pappendekel gemachten Paraboloiden in einigen Studierstuben sattsam beweisen.

Eben so vortheilhaft sind auch die parabolischen Sprach- und Hörröhre, weil im ersten Falle die Schallstrahlen, welche gleiches Gesetz der Abprellung beobachten, parallel bis zu dem Ohre des Horchenden fortgestoßen; im zweyten Falle hingegen eine Menge Parallelstrahlen des Schalls aufgefangen, und in dem Brennpunkte am Ohre konzentriert werden.

§. 30. **Lehrsatz.** Die Subtangente ist der doppelten Abscisse gleich.

Satz. Fig. 16.

Subt. = 2 x.

Beweis.

△ tfc = △ cdm wegen Wechsel- und Vertikalw.
△ fmc = △ cdm

△ tfc = △ ~~cdm~~ also
tf = dm = fm oder
ta + af = aq + af
ta = aq
aber ta + aq = tq
aq + aq = tq
2aq = tq
2x = Subt.

§. 31. **Lehrsatz.** Die Tangente in der Parabel ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe des vierfachen Quadrats der Abscisse, und des Produkts der Abscisse in den Parameter.

Satz. Fig. 16.

$$\text{Tang.} = \sqrt{4x^2 + px}$$

Be-

Beweis.

$$t\,m^2 = t\,q^2 + q\,m^2!$$

subſtit. $\quad Tang^2 = (2x)^2 + y^2$

$$Tang^2 = 4x^2 + px$$

$$\checkmark \qquad Tang = \sqrt{4x^2 + px}$$

§. 32. **Anmerk.** Auf eine ähnliche Art laſſen ſich auch die Normal und Subnormal beſtimmen. Wir wollen aber dieß durch die Differentialrechnung leiſten.

§. 33. **Lehrſatz.** Die Differentialausdrücke der Tangente, Subtangente, Normal- und Subnormallinie, deren Aequivalente nachher in den differenzierten Gleichungen dieſer krummen Linien geſucht werden müſſeu, ſind nicht nur für die Parabel, ſondern für alle allgebraiſchen Kurven folgende:

Satz.

1) $$Tang = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$$

2) $$Subtang = \frac{y\,dx}{dy}$$

3) $$Norm. = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$$

4) $$Subnorm. = \frac{y\,dy}{dx}$$

Beweiſe.

Man nehme an, daß die beyden Ordinaten Fig. 17. PM und pm einander unendlich nahe liegen, ſo wird $Mr = dx$ und $rm = dy$ ſeyn. folglich $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, weil ſich die unend-

endlich kurze Linie M m für eine gerade Hypothenuse ansehen läßt. Alle vier Dreyecke t M q, t M P, P M q und M r m sind ferner wegen rechten Winkeln, und Parallelismus einander ähnlich seyn, denn wegen rechten und gemeinschaftlichen Winkel.

t M P ∽ t M q

t M P ∽ M r m wegen gleichen Winkeln bey t und M.

t M q ∽ M r m

Endlich t M q ∽ P M q aus obigen Gründen.

Also M r m ∽ P M q.

Es ist erstens, wegen denen ähnlichen

△△ t M P und M r m

$$tM : PM = Mm : rm$$

$$Tang : y = \sqrt{dx^2 + dy^2} : dy$$

$$Tang : = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$$

Zweytens wegen den nämlichen △△

$$tP : PM = Mr : rm$$

$$Subtang : y = dx : dy$$

$$Subtang : = \frac{y\,dx}{dy}$$

Drittens wegen t M q und M r m

$$PM : Mq = Mr : Mm$$

$$y : Norm. = dx : \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$Norm. = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$$

Viertens wegen eben diesen Dreyecken

$$PM : Pq = Mr : rm$$

$$y : Subnorm. = dx : dy$$

$$Subnorm. = \frac{y\,dy}{dx}$$

§. 34. An-

§. 34. **Anmerk.** Um sich zu überzeugen, daß man durch diese Ausdrücke, die nämlichen Werthe erhalte, als wie oben aus dem Verhältniß der Linien selbst zu einander, wollen wir die Subtangente auch auf diese Art bestimmen. Normal und Subnormal suchen wir nachher ohnehin durch die eben gefundenen Differentialformeln.

$$y^2 = px$$

diff. $$2ydy = pdx$$

$$\frac{2ydy}{p} = dx$$

$$\frac{2y^2dy}{p} = ydx$$

$$\frac{2y^2}{p} = \frac{ydx}{dy}$$

aber $$\text{subtang} = \frac{ydx}{dy}$$

$$\text{subtang} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$$

§. 35. **Lehrsatz.** Die Normal der Parabel ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe des Produkts der Abscisse in den Parameter, und des vierten Theils des Parameterquadrats.

Satz.

$$\text{Norm} = \sqrt{px + \frac{p^2}{4}}$$

Beweis.

$$y^2 = px$$

diff. $2ydy = pdx$

quad. $4y^2dy^2 = p^2dx^2$

$+ 4y^2dx^2 + 4y^2dx^2$

$$4y^2dy^2 + 4y^2dx^2 = p^2dx^2 + 4y^2dx^2$$

4: $y^2dy^2 + y^2dx^2 = \frac{1}{4}p^2dx^2 + y^2dx^2$

abgek. $y^2(dy^2 + dx^2) = (\frac{1}{4}p^2 + y^2)dx^2$

$= (\frac{1}{4}p^2 + px)dx^2$

$\sqrt{}$ $y\sqrt{dy^2 + dx^2} = dx\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + px}$

: dx $\frac{y\sqrt{dy^2 + dx^2}}{dx} = \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2}$

aber $\frac{y\sqrt{dy^2 + dx^2}}{dx}$ = Norm.

Norm. $= \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2}$

§. 36. **Lehrsatz.** Die Subnormal in der Parabel ist dem halben Parameter gleich.

Satz.

Subnorm. $= \frac{1}{2}p$.

Beweis.

$$y^2 = px$$

diff. $$2ydy = pdx$$

:2 $$ydy = \frac{pdx}{2}$$

:dx $$\frac{ydy}{dx} = \frac{1}{2}p$$

Aber $$\frac{ydy}{dx} = \text{Subnorm.}$$

Folglich $$\text{Subnorm.} = \frac{1}{2}p$$

§. 37. Anmerk. Um den Nutzen einer, oder der andern dieser Linien anschauend zu machen, wollen wir folgende Aufgabe hersetzen. In einer Gegend von ziemlich ebener Aussicht sollte eine Sternwarte angelegt werden. Doch so, daß man wenigst einen Horizont von 20 geographischen Quadratmeilen von der Erdkugel vor sich liegen hätte, wie hoch müßte sie werden?

Auflösung. Man nehme an, die Erde sey eine wahre Kugel. Wenn die Sternwarte c d Fig. 18. rückwärts durch die Erde verlängert würde, so gäbe sie unfehlbar eine Erdachse ab. Die letzten Sehstrahlen des Auges, welche noch auf der Erdkugel aufliegen wie a c, sind, ihre Brechung abgerechnet, als eben so viele Tangenten ringsum anzusehen, wovon der Thurm c d sammt der kleinen Abscisse d b, die einem solchen Bogen a d bis zur Tangente entspricht, die Subtangente ist. Ist nun dieses x bekannt, so weiß man eben darum auch die Subtangente, welche, wenn x davon abgezogen worden, die verlangte Höhe des Thurms giebt. Es kann aber die Abscisse so gefunden werden. Man bestimme in der differentierten Zirkelgleichung das Oberflächenelement, integriere es, und setze das Integral, wo das x sicher vorkommen muß, denen 20 Meilen gleich, so läßt sich der Werth der entsprechenden Abscisse in rheinländischen Schuhen ausdrücken. Es ist aber das Oberflächenelement $2\pi y \sqrt{(dx + dy^2)}$, weil 2π πy jeden Zirkel des runden Körpers vorstellt, und $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ den unendlich kleinen Abstand von einem Zirkel zum andern. Nun ist die Zirkelgleichung,

diff. $y^2 = ax - x^2$

$2ydy = adx - 2xdx$

quad. $4y^2dy^2 = a^2dx^2 - 4axdx^2 + 4x^2dx^2$

: $4y^2 = 4ax - 4x^2$

$$dy^2 = \frac{a^2dx^2 - 4axdx^2 + 4x^2dx^2}{4ax - 4x^2}$$

$+ dx^2 \qquad + dx^2$

$$dy^2 + dx^2 = \frac{a^2dx^2 - 4axdx^2 + 4x^2dx^2}{4ax - 4x^2} + dx^2$$

$$= \frac{a^2dx^2 - 4axdx^2 + 4x^2dx^2 + 4axdx^2 - 4x^2dx^2}{4ax - 4x^2}$$

Abgek. $dy^2 + dx^2 = \frac{a^2 dx^2}{4ax - 4x^2}$

$$\sqrt{dy^2 + dx^2} = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax - x^2}}$$

$$\frac{x2y \quad = \quad x2\sqrt{ax - x^2}}{2y\sqrt{dy^2 + dx^2} = a\,dx}$$

$$\frac{x\pi \qquad\qquad x\ \pi}{2\pi y\sqrt{dy^2 + dx^2} = a\pi\,dx}$$

$$S(2\pi y\sqrt{dy^2 + dx^2} = a\pi x)$$

Es ist also $a\pi x$ der Ausdruck für jeden Oberflächenabschnitt auf der Kugel. Auf der Erdkugel ist $a = 1720 \times 23664$ rheinländ. Schuhe.

Also $a\pi x = 20$ Meilen

$x = \frac{20}{a\pi}$ Dieß nun in rheinländischen Schuhen ausgedrückt.

$$x = \frac{23664 \times 23664 \times 20}{1720 \times 23664 \times 3,141}$$

$$= \frac{23664 \times 2}{172 \times 3,141} = \frac{23664}{86 \times 3,141},$$

$$= \frac{11832}{43 \times 3,141} = 87,6$$

End.

Endlich berechne man auch die Subtangente einer Kugel und ziehe das x davon ab, so hat man die verlangte Höhe des Thurms.

$$y^2 = ax - x^2$$

$$2y\,dy = a\,dx - 2x\,dx$$

$$\frac{2y\,dy}{a-2x} = dx$$

x y $$\frac{2y^2\,dy}{a-2x} = y\,dx$$

: dy $$\frac{2y^2}{a-2x} = \frac{y\,dx}{dy} = \text{Subtang.}$$

allein $y^2 = ax - x^2$

subst. $$\frac{2(ax - x^2)}{a - 2x} = \text{Subt.}$$

Das x abgezogen.

$$\frac{2(ax - x^2)}{a - 2x} - x = \frac{2ax - 2x^2 - ax + 2x^2}{a - 2x}$$

$$= \frac{ax}{a - 2x}.$$ In Zahlen ausgedrückt.

$$= \frac{1720 \times 23664 \times 87{,}6}{1720 \times 23664 - 2 \times 87{,}6}$$

$$= \frac{3565502208}{40702080 - 175{,}2}$$

$$= \frac{3565502208}{40701904{,}8} = 87{,}6 \text{ Schuhe.}$$

38. **Anmerk.** Dergleichen Berechnungen lassen sich auch zur See bey der Schiffahrt nutzen, wenn man erfahren will, wie viele Meilen man aus einer gewißen Höhe des Mastkorbes überblicken könne, oder wie hoch man den Mastkorb hängen müßte, um in diese, oder jene Ferne blicken zu können.

§. 39. Aufgabe. Eine Parabel rektificieren.

Auflösung. Da das Element jeder krummen Linie $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist, so suche man dieses Ausdruckes Aequivalent in der differentierten Parabelgleichung, und integriere es, und man hat die Rektifikation eines Bogens, der einer angenommenen Abscisse, oder Ordinate entspricht.

$$y^2 = px$$

diff. $2ydy = pdx$

quad. $4y^2dy^2 = p^2dx^2$

aber $4y^2 = 4px$

div.

$$dy^2 = \frac{pdx^2}{4x}$$

$$+dx^2 \quad +dx^2$$

$$dy^2 + dx^2 = \frac{pdx^2}{4x} + dx^2 = dx^2\left(\frac{p}{4x} + 1\right)$$

$$= dx^2\left(\frac{p+4x}{4x}\right), \text{ und } \sqrt{\left(dy^2 + dx^2\right)}.$$

$$= dx\sqrt{\left(\frac{p+4x}{4x}\right)} = \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\left(p+4x\right)}$$

Nun ziehe man nach dem binomischen Lehrsatz, aus $p + 4x$ die Quadratwurzel durch eine unendliche Reihe aus, multiplicire am Ende diese gefundene Reihe durch $\frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}$ und integriere sämmtliche Produkte, so hat man die verlangte Rektifikation.

tion. Es ist $(p + 4x)^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} p^{-\frac{1}{2}} \times 4x$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}}{1 \times 2} p^{-\frac{3}{2}} \times 16x^2 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2}}{1 \times 2 \times 3} p^{-\frac{5}{2}} \times 64x^3 \ldots$$

$$= p^{\frac{1}{2}} + \frac{2x}{p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^2}{p^{\frac{3}{2}}} + \frac{4x^3}{p^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots$$

Die Reihe durch $\frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}$ multipliciert.

$$= \frac{p^{\frac{1}{2}} dx}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2x\,dx}{2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^2\,dx}{2p^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}} + \frac{4x^3\,dx}{2p^{\frac{5}{2}}x^{\frac{1}{2}}} \ldots$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx}{2} + \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{p^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{p^{\frac{3}{2}}} + \frac{2x^{\frac{5}{2}} dx}{p^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots$$

$$S\sqrt{dx^2 + dy^2} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} p^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2} p^{\frac{3}{2}}} + \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2} p^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{oder} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{2}{2}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5p^{\frac{3}{2}}} + \frac{4x^{\frac{7}{2}}}{7p^{\frac{5}{2}}} \ldots$$

§. 40. **Anmerk.** Das verdrüßlichste bey dieser Reihe ist, daß sie so langsam abnimmt: man muß also, um einen Parabelbogen mit ziemlicher Akurateſſe zu bestimmen, sehr viele Glieder mühsam berechnen. Auch die Reihe, wo statt x das y beybehalten wird, ist nicht viel vortheilhafter. Sie heißt

$$y + \frac{2y^2}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9p^8} \ldots$$

Ist nun hier der Parameter klein, und die letzte Ordinate groß, so fällt die Reihe eben so langsam zusammen.

Freylich erhielte man eine schnelle konvergirende Reihe, wenn aus dem Binomium $p + 4x$ in verkehrter Ordnung, nämlich aus $4x + p$ die Wurzel ausgezogen, dann durch $\frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}$ multiplicirt, und integriert würde; allein man kömmt im zweyten Gliede auf ein logarithmisches Differenzial $\frac{px^{-1}dx}{8}$, welches sich durch die gemeinen Regeln schlechterdings nicht integrieren läßt, sondern sein Integral mit Zuziehung der Subtangente der Logistik, einer gewißen krumen Linie, gesucht werden muß. Weil wir aber von dieser Linie noch nichts sagen konnten, so sind wir gezwungen diese Art von Rektifikation auf weiters zu verschieben.

§. 41. Anmerk. Es giebt eine Art von Parabel, in welcher $y^3 = px^2$, oder zum Unterschiede $\Phi^3 = pz^2$ die sich vollkommen quadrieren läßt. Man nennt sie von dessen Erfinder Wilhelm Neil, einem Britten, die Neilische Parabel. Ihre Beschreibung oder Konstruktion geht so vor sich. Man zeichne erst eine Apollonische Parabel (denn so heißt der ächte Kegelschnitt im Gegensatze der neilischen Parabel) errichte auf dem Scheitelpunkt der Achse einen Perpendikel, welcher zu beyden Seiten unbestimmt verlängert werden kann, und lege in eben dem Scheitelpunkt einen rechten Winkel so an, daß ein Schenkel die Kurve berühre, oder auch schneide, das heißt, eine Sehne abgebe. Wenn nun die Ordinate des Berührungspunkts bis zu dem andern Schenkel verlängert wird, so erhält man einen Ort in der neilischen Parabel. Legt man mehr dergleichen rechte Winkel an, so bestimmen sich auch mehr Punkte, wodurch die Kurve gezogen werden muß. Es soll nun erwiesen werden, daß in dieser Linie der Kubus der Ordinate gleich ist dem Produkte des Parameters in das Quadrat der Abscisse.

Satz. Fig. 20.

$$\Phi^3 = pz^2$$

Beweis.

Es ist wegen rechten Winkel, worüber ein halber Zirkel geschwungen werden kann

$$q\,m : a\,q = a\,q : r\,q$$

quad. $$q\,m^2 : a\,q^2 = a\,q^2 : r\,q^2$$

Da nun sonst $q\,m = y^2 = p\,x$
aber dießmal $x = a\,q = f\,r = \Phi$ ist
so ist auch $q\,m^2 = p\,\Phi$
$q\,r = a\,h = z$
und $a\,q = h\,r = \Phi$

Substit. $p\,\Phi : \Phi^2 = \Phi^2 : z^2$
$\Phi^4 = p\,\Phi\,z^2$
$: \Phi$ $\Phi^3 = p\,z^2$; was zu erweisen war. Nun zur Rektifikation.

Die Gleich. diff. $3\,\Phi^2\,d\,\Phi = 2\,p\,z\,d\,z^2$
Quad. $9\,\Phi^4\,d\,\Phi^2 = 4\,p\,p\,z^2\,d\,z$
div. durch $\Phi^3 = p\,z^2$

$$9\,\Phi\,d\,\Phi^2 = 4\,p\,d\,z^2$$

$$\frac{9\,\Phi\,d\,\Phi^2}{4\,p} = d\,z^2$$

$$d\,z^2 = \frac{9\,\Phi\,d\,\Phi^2}{4\,p}$$

$$+\,d\,\Phi^2 \qquad 4\,d\,\Phi^2 \quad +$$

$$d\,\Phi^2 + d\,z^2 = d\,\Phi^2 + \frac{9\,\Phi\,d\,\Phi^2}{4\,p},$$

$$= d\,\Phi^2\left(1 + \frac{9\,\Phi}{4\,p}\right) = \sqrt{d\,\Phi^2 + d\,z^2},$$

$$= d\,\Phi\sqrt{1 + \frac{9\,\Phi}{4\,p}};$$ Diesen Werth des Kurvaelements durch Hilfe der Transformation integriert.

Es

Es sey demnach $\sqrt{1 + \frac{9\Phi}{4p}} = v$

$$1 + \frac{9\Phi}{4p} = v^2$$

$$4p + 9\Phi = 4pv^2$$

$$9d\Phi = 8pvdv$$

$$d\Phi = \frac{8}{9} pvdv$$

mult. durch $\sqrt{\left(1 + \frac{9\Phi}{4p}\right)} = v$

$$d\Phi \sqrt{\left(1 + \frac{9\Phi}{4p}\right)} = \frac{8}{9} pv^2 dv$$

$$S\left(d\Phi \sqrt{1 + \frac{9\Phi}{4p}}\right) = \frac{8pv^3}{27}$$

Subſtit. $= \frac{8p}{27} \sqrt{\left(1 + \frac{9\Phi}{4p}\right)^3}$

Weil hier beyde Funktionen, Ordinate und Abſciſſe miteinander wachſen und abnehmen, ſo muß, wenn eine $= o$ geeſetzt wird, auch die andere $= o$ ſeyn: folglich der ganze Werth der Gleichung, bis auf die beſtändigen Größen zuſammenfallen. Man kann alſo hier die Konſtante leicht beſtimmen. Denn

$$o = \frac{8p}{27} \sqrt{1 + \frac{o \times \Phi}{4p}} + c$$

$$o = \frac{8p}{27} + c$$

$$-\frac{8p}{27} = c.$$

Es iſt demnach die wahre Rektifikation der Neiliſchen Para-

bel. $\frac{8p}{27}\sqrt{1+\frac{9\Phi}{4p}}-\frac{8p}{27}$ . .

§. 42. Aufgabe. Eine Parabel quadrieren.

Auflösung. Man suche mehrmal in der Parabelgleichung für das allgemeine Flächenelement der krummen Linie $y\,dx$ einen Werth und integriere ihn:

$$y^2 = px$$

$$\sqrt{\ } = y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$$

$$x\,dx \quad ydx = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$Sydx = \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{px^3}$$

Der Ausdruck für die durch die Achse halbierte Parabelfläche.

§. 43. **Zusatz.** Wollte man lieber die Ordinate als die Abscisse in der Formel haben, so finde man in der Gleichung einen schicklichen Werth zum Substituieren;

$$y^2 = px$$

$$\frac{y^2}{p} = x$$

Kubiert $\frac{y^6}{p^3} = x^3$

$$x\ p \quad \frac{y^6}{p^2} = px^3$$

Also $\frac{2}{3}\sqrt{px^3} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{y^6}{p^2}} = \frac{2}{3} \times \frac{y^3}{p}$

Und $q = \frac{2y^3}{3p}$

Es

Es sey z. B. die letzte Ordinate einer Parabelfläche 12 Schuhe und der Parameter derselben 4 Schuhe, so ist $q = \frac{2 \times 12^3}{3 \times 4} = \frac{2 \times 1728}{12} = \frac{1728}{6}$ = 288 Quadratschuhe.

§. 44. Zusatz. Eigentlich ist dieß aber nur die halbe Parabelfläche, wovon nämlich die Achse, ein Parabelast, und nach der Sprache der Alten, eine Semiordinate, Gränzen sind. Um die Ganze zu erhalten, muß demnach, weil die Achse selbe gleich abtheilt, der Ausdruck $\frac{2y^3}{3p}$ duppliert werden;

Folglich $q = \frac{4y^3}{3p}$

§. 45. Zusatz. Soll der Parameter aus der Rechnung wegbleiben, so ist $q = \frac{3}{4} x y$; denn $p = \frac{y^2}{x}$, und dafür in der Quadraturgleichung substituiert.

Giebt $\frac{4y^3}{\frac{3 \times y^2}{x}} = \frac{4y^3 x}{3y^2} = \frac{4yx}{3} = q$

§. 46. Zusatz. Wird der Parameter = 1 gesetzt so ist $q = \frac{4y^3}{3}$

§. 47. Lehrsatz. Das Flächenstück, welches vom Parameter abgeschnitten wird, ist genau der sechste Theil des Parameterquadrats.

Satz.

$q = \frac{1}{6} p^2$

Beweis.

Es ist hier $2y = p$ . . . . .

Also $8y^3 = p^3$

:2 $4y^3 = \frac{p^3}{2}$

In $q = \frac{4y^3}{3p}$ substituirt.

giebt $q = \frac{p^3}{2} = \frac{p^3}{6p} = \frac{p^2}{6}$

§. 48. **Zusatz.** Es können auch Segmente der Parabelfläche zwischen zwo rechtwinklichten Ordinaten quadriert werden, wenn diese Ordinaten sammt ihrer Entfernung gegeben werden. Denn es sey

Fig. 21.

$ac = x$

$ad = m$

$cb = y$

und $df = Z$ so ist §. 17.

$ac : cd = ab^2 : df^2$

oder $x : (x + m) = y^2 : Z^2$

$xZ^2 = y^2x + my^2$

$xZ^2 = y^2x + my^2$

Vers. $xZ^2 - y^2x = my^2$

$: (Z^2 - y^2)$ $x = \frac{my^2}{Z^2 - y^2}$

Also die ganze Abscisse $\frac{my^2}{Z^2 - y^2} + m$

$= \frac{my^2 + mZ^2 - my^2}{Z^2 - y} = \frac{mZ^2}{Z^2 - y^2}$

Diese

Diese Abscisse nun mit vier Drittel von der entsprechenden Ordinate multipliciert, giebt

$$\frac{4Z}{3} \times \frac{m Z^2}{Z^2 - y^2} = \frac{4 m Z^3}{3(Z^2 - y^2)}$$

als den Inhalt der ganzen Parabelfläche.

Man bestimme endlich auch das mangelnde Stück c g a b. Es ist dasselbe

$$\frac{4y}{3} \times \frac{m y^2}{Z^2 - y^2} = \frac{4 m y^3}{3(Z^2 - y^2)}$$

Werden nun beyde Quadraturen voneinander abgezogen, so kömmt natürlich der Flächeninhalt des Parabelsegments zum Vorschein. Daher

$$\frac{4 m Z^3}{3(Z^2 - y^2)} - \frac{4 m y^3}{3(Z^2 - y^2)} = \frac{4 m (Z^3 - y^3}{3(Z^2 - y^2)}$$

§. 49. **Anmerk.** Statt der Entfernung der Ordinaten, oder statt einer dieser Ordinaten, kann auch der Parameter gegeben werden, ohne die Berechnung einer neuen Schwierigkeit zu unterwerfen. Es müssen auch die Ordinaten eben nicht parallel gehen, die das Flächenstück begränzen helfen.

§. 50. **Aufgabe.** Eine Paraboloide, d. i., einen durch Umwälzung einer Parabel um ihre Achse erzeugten Körper, kubieren.

Auflösung. Das Körperelement ist §. 82. $\pi y^2 dx$, wenn y die Semiordinate bezeichnet. Nun

$$y^2 = p x$$

$$\text{X} \pi dx \quad \pi y^2 dx = \pi p x dx$$

$$S(\pi y^2 dx) = \frac{\pi p x^2}{2}$$

Also

Also wenn c die Kubatur bedeutet.

$$c = \frac{\pi p x^2}{2}$$

51. Zusatz. Will man wieder, wie oben bey der Quadratur, statt der Abscisse die Ordinate in die Rechnung bringen, so ist weil

$$\frac{y^2}{p} = x$$

und

$$\frac{y^4}{p^2} = x^2$$

nach geschehener Substitution

$$c = \frac{\pi p y^4}{2 p^2} = \frac{\pi y^4}{2 p}$$

52. Zusatz. Endlich wenn auch der Parameter aus der Formel wegfallen soll, so werde statt ihm mehrmal das Aequivalent desselben in eine der beyden obigen Kubaturgleichungen gesetzt. Weil nun

$$\frac{y^2}{x} = p$$

so ist z. B. in

$$c = \frac{\pi y^2}{2 p}$$

nachher

$$c = \frac{\pi y^4}{2} : \frac{y^2}{x}$$

$$= \frac{\pi y^4}{2} \times \frac{x}{y^2}$$

$$= \frac{\pi y^4 x}{2 y^2}$$

$$c = \frac{\pi y^2}{2}$$

Oder

Oder in $c = \frac{\pi p x^2}{2}$

nach der Subſtit. $c = \frac{\pi y^2 x^2}{2x} = \frac{\pi y^2}{2}$

Wo demnach überall der nämliche Ausdruck zum Vorſchein kömmt.

§. 53. **Anmerk.** Wenn man die Sache analogiſch mit der Quadratur betrachtet, ſo wird man bald begreifen, daß ſich auch abgeſtutzte Paraboloiden, und mancherley Ausſchnitte aus ſelben berechnen laſſen, welche hier alle anzuführen, der enge Raum dieſes Bändchens verbeut.

§. 54. **Anmerk.** Etwas zur Aufgabe. Es ſoll ein groſſer paraboliſcher Brennſpiegel, deſſen Brennweite $\frac{1}{2}$ Schuh beträgt, und wo der Durchmeſſer von der Oeffnung bis zum Scheitelpunkte 2 Schuh mißt, innenher vergoldet werden. Wie viel wird man Gold dazu nöthig haben, wenn nach Muſchenbröcks Angabe ein Gran hinreicht, $36\frac{1}{2}$ Quadratzolle zu überziehen?

Auflösung. Jener Körper, der genau in dieſen Brennſpiegel hineinpaſſen würde, wäre unfehlbar eine vollkommene Paraboloide. Es iſt demnach einerley, ob die Oberfläche dieſer Paraboloide, oder die hohle Fläche des Brennſpiegels berechnet wird, weil ſie einander bedecken. Man nehme demnach die Gleichung der Parabel her, differenziere ſie, und ſuche alsdann das Aequivalent des Oberflächenelements, deſſen Integral die verlangte Fläche giebt. Nun zur Sache

$$y^2 = px$$

diff. $2ydy = p\,dx$

quad. $4y^2dy^2 = p^2\,dx^2$

div. durch $4y^2 = 4px$

$$dy^2 = \frac{p^2\,dx^2}{4py} = \frac{p\,dx^2}{4x}$$

add. $dx^2 \qquad dx^2$

$$dy^2 + dx^2 = \frac{p\,dx^2}{4x} + pdx^2 = \frac{pdx^2 + 4xdx^2}{4x}$$

Anders ausgedrückt. $= \frac{dx^2}{4}\left(\frac{p + 4x}{x}\right)$

$$\surd \quad \surd dy^2 + dx^2 = \frac{dx}{2}\surd\frac{p + 4x}{x}$$

$$\times 2\pi y \qquad 2\pi y\surd dy^2 + dx^2 = \frac{2\pi y\, dx}{2}\surd\frac{p + 4x}{x}$$

$$\pi y\, dx \surd\frac{p + 4x}{x}$$

Aber $y = \surd px$

$$\text{Subst.} \quad 2\pi y\surd dy^2 + dx^2 = \pi dx\surd px\surd\frac{p + 4x}{x}$$

$$= \pi dx\surd\frac{(p + 4)px}{x}$$

$$= \pi dx\surd\frac{p^2x + 4px^2}{x}$$

$$2\pi y\surd dy^2 + dx^2 = \pi dx\surd p^2 + 4px$$

Weil nun die zwote Seite der Gleichung integriert zu werden verlangt, so kann dieß am füglichsten durch die Transformation geleistet werden.

Es sey daher $\surd p^2 + 4px = Z$

quad $p^2 + 4px = Z^2$

diff. $4pdx = 2ZdZ$

$:4p$ $dx = \frac{2ZdZ}{4p} = \frac{ZdZ}{2p}$

Aber

Aber es ist $\sqrt{p^2 + 4px} = Z$, fola. mult.

$$dx\sqrt{p^2 + 4px} = \frac{Z^2\,dZ}{2p}$$

$$\times\pi \qquad \pi dx\sqrt{p^2 + 4px} = \frac{\pi Z^2\,dZ}{2p}$$

$$S(\pi dx\sqrt{p^2 + 4px}) = \frac{\pi Z^3}{6p}$$

Statt Z^3 den Werth $\sqrt{(p^2 + 4px)^3}$ substituiert, oder auch, was gleich viel ist, $(p^2 + 4px)\sqrt{p^2 + 4px}$

$$S(\pi dx\sqrt{\text{etc.}} = \frac{\pi(p^2 + 4px)\sqrt{p^2 + 4px}}{6p}$$

$$= \tfrac{1}{6}\pi(p + 4x)\sqrt{p^2 + 4px}$$

Endlich für π, p und x ihre Werthe substituiert, giebt $\frac{1}{6} \times 3,14(2 + 4\times2)\sqrt{2^2 + 4\times2\times2}$

$\frac{1}{6} \times 3,14(2 + 8)\sqrt{4 + 16}$

$\frac{1}{6} \times 3,14 \times 10\sqrt{20}$

$$\frac{31,4 \times 4,47}{6} = \frac{140,358}{6},$$

$= 23',39''$, oder beynahe $23\frac{2}{3}$ Quadratschuhe.

Man hat demnach keinen Gran Gold dazu nöthig; sondern nach folgender Proportion:

$36\frac{2}{3}$ Schuh: 3 Gren $= 23\frac{2}{3}$ Schuh: Z

$3 \times 23\frac{2}{3} = 36\frac{2}{3}$ Z

$70\frac{1}{5} = \frac{110}{3}$ Z

$351 = \frac{550}{3}$ Z

$1053 = 530$ Z

$\frac{1053}{530} = Z$. Also

Z $= 2$ Gren beynahe. 55. An-

§. 55. **Anmerk.** Der Artikel von den Durchmessern der Parabel, und der übrigen Kegelschnitte ist hier geflissentweggelassen worden; theils weil die Beweise der hier einschlägigen Lehrsätze meist sehr gedehnt ausfallen, und es mir noch nicht glückte, sie beträchtlich abkürzen zu können; theils, weil dadurch die Größe dieses Bandes merklich anwachsen würde, wo zudem diese Materie von keiner gar großen Erheblichkeit zu seyn scheint. Zum Ueberflusse wollen wir doch die Erklärung davon geben. Wenn aus was immer für einem Punkte der Krümmung eine Parallellinie mit der Achse fortgezogen wird, so heißt solch eine Linie ein Diameter der Parabel. Bey andern Kurven hat sie den nämlichen Karakter. Diese Benennung kömmt aber daher, weil sie alle Sehnen, die mit der zugehörigen Tangente parallel laufen, durchaus in zween gleiche Theile theilt.

§. 56. **Aufgabe.** Formeln zu finden, wodurch man in Stand gesetzt wird, eine Familie von unendlicherley Parabeln auf einmal zu rektificieren, quadriren, u. d. gl.

Auflösung. Es gehören nach §. 8. zu ein und der nämlichen Parabelfamilie $y^2 = px$, $y^3 = px^2$, $y^4 = px^3$ u. s. f. Eben so gut auch $y^3 = p^2x$, $y^4 = p^3x$ $y^5 = p^4x$ u. s. f.; folglich ist der allgemeine Ausdruck für Parabelgleichungen $y^{m+n} = p^m x^n$. Man differenziere daher diese Gleichung, und verfahre, wie gewöhnlich, so muß sie am Ende ein allgemeines Resultat geben. Erst die allgemeine Rektifikation.

$$y^{m+n} = p^n x^m$$

diff. $(m+n)\, y^{m+n-1}\, dy = np^m x^{n-1} dx$

div. $$dy = \frac{np^m x^{n-1} dx}{(m+n)y^{m+n-1}}$$

quad. $$dy^2 = \frac{n^2 p^{2m} x^{2n-2} dx^2}{(m+n)^2 y^{2m+2n-2}}$$

$+ dx \qquad = dx^2$

dy^2

$$dy^2 + dx^2 = dx^2 + \frac{n^2 p^{2m} x^{2n-2} dx^2}{(m+n)^2 y^{2m+2n-2}}$$

$$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx \sqrt{1 + \frac{n^2 p^{2m} x^{2n-2}}{(m+n)^2 y^{2m+2n-2}}}$$

Weil aber $p^m x^n = y^{m+n}$
folgl. auch $p^{2m} x^{2n} = y^{2m+2n}$
und div. durch $px = y^2$

$$p^{2m-1} x^{2n-1} = y^{2m+2n-2}$$

so kann in der zwoten Seite der Gleichung substituiert werden, und giebt

$$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx \sqrt{1 + \frac{n^2 p^{2m} x^{2n-2}}{(m+n)^2 p^{2m-1} x^{2n-1}}}$$

$$= dx \sqrt{1 + \frac{n^2 p x^{-1}}{(m+n)^2}}$$

Da nun die Wurzel durch eine unendliche Reihe bestimmt werden muß, so wollen wir der Bequemlichkeit halber, statt $\frac{n^2 p}{(m+n)^2} = \mu$ setzen, so entsteht folgender Kalkul,

$$\sqrt{(\mu x^{-1} + 1)} = (\mu x^{-1} + 1)^{\frac{1}{2}} = \mu^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{1}{2} \mu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} + \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}}{1 \times 2} \mu^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{5}{2}}$$
$$+ \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2} \times -\frac{5}{2}}{1 \times 2 \times 3} \mu^{-\frac{5}{2}} x^{-\frac{7}{2}} \ldots + 1$$
$$= \mu^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \mu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \mu^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{5}{2}}$$
$$+ \frac{5}{16} \mu^{-\frac{5}{2}} x^{-\frac{7}{2}} \ldots + 1$$

Endlich alle Glieder durch dx multipliciert:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \mu^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2} \mu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx -$$
$$- \frac{1}{8}$$

$$- \frac{1}{8}\mu^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{5}{2}} dx + \frac{5}{16}\mu^{-\frac{5}{2}} x^{-\frac{7}{2}} dx,$$

$$S(\sqrt{dx^2 + dy^2}) = 2\mu^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \mu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\mu^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\mu^{-\frac{5}{2}} x^{-\frac{5}{2}} \ldots x$$

Wird endlich für μ wieder sein Werth in der Berechnung selbst gesetzt, so ist die Formel für jede mögliche Parabel anwendbar.

Bey der allgemeinen Quadratur ist die Arbeit weniger mühsam.

$$y^{m+n} = p^m x^n$$

$$\text{oder } y = \sqrt[m+n]{p^m x^n} = p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$$

$$y\,dx = p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{m}{m+n}} dx$$

$$S(ydx) = \frac{p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{m}{m+n}+1}}{\frac{m}{m+n}+1} = \frac{p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{m+m+n}{m+n}}}{\frac{m+m+n}{m+n}}$$

$$S(ydx) = \frac{(m+n)\, p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{2n+m}{m+n}}}{2n+m}$$

§. 57. Zusatz. Um sich von der Richtigkeit dieser allgemeinen Formel zu überzeugen, wollen wir sie auf die Parabel der ersten Ordnung anwenden. Dort ist $m = 1$ und $n = 1$ folglich fällt der Ausdruck in diesen zusamm $\frac{2p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{3}$. Wird ferner $x^{\frac{3}{2}}$ in $x \times x^{\frac{1}{2}}$ zerfällt, so giebt es $= \frac{2p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} x}{3}$, und weil $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$, substituirt $+ \frac{2}{3} x y$, wie es oben gefunden worden.

§. 58. Zusatz.

§. 58. **Zusatz.** Eine gleiche Bewandniß hat es auch mit der unendlichen Kubatur, und der Oberflächenquadrierung.

§. 59. **Aufgabe.** Eine allgemeine Subtangentenformel für unendlich viele Parabeln ausfindig zu machen.

Auflösung. $y^{m+n} = p^m x^n$

$(m+n)\, y^{m+n-1}\, dy = n p^m x^{n-1}\, dx$

$$\frac{(m+n)\, y^{m+n-1}\, dy}{n p^m x^{n-1}} = dx$$

xy $$\frac{(m+n)\, y^{m+n}\, dy}{n p^m x^{n-1}} = y\, dx$$

:dy $$\frac{(m+n)\, y^{m+n}}{n p^m x^{n-1}} \frac{}{1} = \frac{y\, dx}{dy} = \text{Subt.}$$ §33

subst. weil $y^{m+n} = p^m x^n$

$$\frac{(m+n)\, p^m x^n}{n p^m x^{n-1}} \frac{}{1} = \text{Subt.}$$

abgek. $$\frac{(m+n)\, x}{n} = \text{Subt.}$$

§. 60. **Aufgabe.** Die Subnormal jeder Parabel allgemein zu bestimmen.

Auflösung. $y^{m+n} = p^m x^n$

diff. $(m+n)\, y^{m+n-1}\, dy = n p^m x^{n-1}\, dx$

mult. durch $y^2 = px$

$(m+n)\, y^{m+n+1}\, dy = n p^{m+1} x^n\, dx$

div. durch $(m+n)\, y^{m+n} = (m+n)\, p^m x^n$

$y\, dy = n p\, dx$

$$\frac{}{m+n}$$

:dn $$\frac{y\,dy}{dx} = \frac{n\,p}{m+n}$$

also Subnorm. $$= \frac{n\,p}{m+n}$$

§. 61. **Anmerk.** Auf eine nicht viel unähnliche Art erhält man auch allgemeine Ausdrücke für Tangenten und Normalen unendlicher Parabeln, welche wir Kürze halber hier weglassen wollen. Noch am Ende dieses Kegelschnitts muß angemerkt werden, daß die Theorie desselben vorzüglich gute Dienste in der Artillerie leistet, da, wie aus der Physik bekannt ist, jeder Körper, der nicht perpendikulär geworfen wird, also auch Bomben, eine Parabel beschreiben.

Von der Ellipse.

§. 62. **Erklär.** In jeder Ellipse können zweyerley Achsen gezogen werden: jene welche die Kurva der Länge nach in zween gleiche Theile theilt, heißt die größere Achse, oder schlechtweg die Achse, und wird durch a ausgedrückt. Die andere, welche das nämliche nach der Breite leistet, folglich auch die größere Achse selbst halbiert, wird die kleine Achse, oder Querachse genennt; wir wollen sie künftig c heißen. Die obige Definition des Parameters bleibt auch hier und in der Hyperbel, so wie bey der Parabel.

§. 63. **Lehrsatz.** Ueberall ist in diesem Kegelschnitte das Quadrat der Ordinate gleich dem Produkte aus dem Parameter in die Segmente der großen Achse, durch eben diese Achse dividiert.

Satz

$$y^2 = \frac{p\,x\,(a-x)}{a}$$

Beweis.

Beweis.

Man lege durch jenen Theil des Kegels, aus welchem die Ellipse geschnitten worden, irgendwo eine Zirkelfläche parallel mit der Basis, so wird eine gemeinschaftliche Ordinate des Zirkels und der Ellipse auf einem gemeinschaftlichen Punkt der zwoen Axen perpendikulär stehen. Es ist demnach Fig. 22

$$pm^2 = ap \times ph$$

oder

$$y^2 = ap \times ph$$

Wenn nun oben und unten an den Scheitelpunkten der Ellipse Linien parallel mit der Basis durch den Kegel gezogen werden, so lassen sich Aequivalente für ap und ph bestimmen. Denn wegen dem Parallelschnitt ph ist nach §. 143 Geom. in dem Dreyecke bck

$$bp : ph = bc : ck$$

oder

$$x : ph = a : ck$$

$$ph = \frac{x \times ck}{a}$$

Eben so in dem △ cdb

$$cp : ap = cb : db$$

oder

$$a-x : ap = a : db$$

$$ap = \frac{(a-x) \times db}{a}$$

Nun in der erstern Gleichung substituiert, giebt $y^2 = \frac{(a-x) \times db}{a} \times \frac{x \times ck}{a}$. Anders geord.

$$y^2 = \frac{db \times ck}{a} \times \frac{x\,(a-x)}{a}$$

Weil aber der Quotus $\frac{db \times ck}{a}$ aus lauter be-

ständigen Größen zusammgesetzt ist, folglich selbst beständig seyn muß, so ist dieß der Parameter der Ellipse, und kann wieder überhaupt dafür in der Gleichung p substituiert werden.

Also ist $y^2 = \frac{px(a-x)}{a}$

§. 64. Zusatz. Diese Gleichung für die Ellipse $y^2 = \frac{px(a-x)}{a}$ läßt sich, wenn man wirklich multipliciert, und das erste Glied dividiert, auch so ausdrücken: $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$. Daher kömmt nun der Name Ellipse, welches Wort, wie wir schon oben erinnerten, einen Mangel bezeichnet; weil nämlich hier die Ordinate dem Produkt aus den Parameter in die Abscisse nicht völlig gleich ist, wie in der Parabel, wo $y^2 = px$ war, sondern von selbem die Größe $\frac{px^2}{a}$ abgezogen werden muß.

§. 65. Anmerk. Es lassen sich aber eben so gut aus Walzen, als aus Kegeln, Ellipsen ausschneiden. Der Beweis hievon ist eben nicht schwer. Man ziehe Fig. 23 alle hieher gehörigen Linien, wie vorher beym Kegel; so ist erstens

$$pm^2 = fp \times ph$$

oder $y^2 = fp \times ph$. Für pf und ph nun auf gleiche Art ihre Werthe bestimmt.

$$gp : fp = ga : ak$$

weil aber $gp = x$

$ga = a$

und $ak = fh = gd = diam.$

oder schlechtweg $= d.$

subst. $x : fp = a : d$

$fp = \frac{xd}{a}$

Weil

Weil nun das zweyte Segment

$$ph = fh - fp$$ und nach der Subſtit.

$$ph = d - \frac{xd}{a}$$

ſo wird $$ph = \frac{ad - xd}{a}$$

und $$ph = (a-x)\frac{d}{a}$$

Endlich in der Hauptgleichung ſtatt fp und ph ihre eben gefundnen Werthe geſetzt; giebt

$$y^2 = \frac{xd}{a} \times (a-x)\frac{d}{a}.$$

Anders geordnet; $$y^2 = \frac{d^2}{a}\, x\, \frac{(a-x)}{a}$$

Wird für d^2, als einer beſtändigen Größe, p geſetzt, ſo kömmt die eigenthümliche Gleichung der Ellipſe zum Vorſchein, $$y^2 = \frac{px\,(a-x)}{a}$$, welche um gar nichts von der Kegelellipſe unterſchieden iſt, als um den größern Parameter, vorausgeſetzt daß ihre Achſe gleiche Länge mit jener habe; weil der Walzendurchmeſſer doch größer ſeyn muß, als die Parallelſchnitte des Kegels, welche dort das Dividendum des Parameters geben.

§. 66. Zuſatz. In jeder Ellipſe verhalten ſich demnach die Quadrate der Ordinaten, wie die Produkte aus den entſprechenden Segmenten der Achſe. Es heiße eine Ordinate y, die zugehörigen Segmente x und $a-x$, die andere Ordinate Y, und ihre Segmenten X und $a-X$, ſo gilt die Proportion

$$y^2 : Y^2 = a\,(a-x) : X\,(a-X)$$

Beweis.

Beweis.

In jedem Ellipsenpunkt ist

$$y^2 = \frac{px\,(a-x)}{a}$$

folglich auch $Y^2 = \frac{pX\,(a-X)}{a}$

$$y^2 : Y^2 = \frac{px\,(a-x)}{a} : \frac{pX\,(a-X)}{a} \qquad \cdot aX$$

$$= px\,(a-x) : pX\,(a-X) \qquad :p$$

$$y^2 : Y^2 = x\,(a-x) : X\,(a-X)$$

§. 67. **Zusatz.** Auch in der Ellipse giebt es zu beyden Seiten der Achse Ordinaten; weil hier gleichfalls $y = \pm \sqrt{\frac{px\,(a-x)}{a}}$

§. 68. **Zusatz.** Die Ellipse ist eine in sich selbst zurückkehrende Linie, wie dieß neben der Natur des Kegelschnitts selbst auch aus der Gleichung gezeigt werden kann. Denn setze man erstens

$x = o$, so ist

$$y^2 = \frac{po \times (a-o)}{a}$$

$$y^2 = o$$

$$y = o$$

Also fangen die Ordinaten mit den Abscissen an: setzt man zweytens $x = a$, d. i. wird die Abscisse zur Achse, so erscheint die Gleichung

$$y^2 = \frac{pa\,(a-a)}{a}$$

$$y^2 = pa \times o$$

y^2

$y^2 = o$

$y = o$; und man sieht, daß die Ordinaten wieder aufhören, wenn die Abscisse an Größe der Achse gleicht, oder mit andern Worten, daß die Kurve auf den Endpunkten der Achse aufliege. Da nun dieß auf beyden Seiten der Achse wahr ist, so hat es auch aus der Gleichung seine Richtigkeit, daß die Ellipse in sich zurückkehre.

§. 69. **Zusatz.** Die Ellipse ist von der Parabel blos an der Achsenlänge unterschieden; denn ist diese unendlich, so wird sie zur Parabel. Es ist alsdann $y^2 = \frac{px(\infty - x)}{\infty}$

$$y^2 = \frac{px\infty}{\infty}$$

$\therefore \infty$ $\quad y^2 = px$

§. 70. **Anmerk.** Dieser Satz kömmt der Astronomie bey Berechnung der Kometenperioden sehr gut zu statten, indem die Laufbahnen dieser Gattung von Irrsternen unermeßlich lange Ellipsen sind.

§. 71. **Lehrsatz.** Die größte Ordinate erhält man auf dem Mittelpunkt der Achse, oder wenn die Abscisse der halben Achse gleicht.

Voraussetzung.

$y =$ Maximo.

Satz

$x = \frac{1}{2}a$

Beweis.

Beweis.

$$y^2 = \frac{p\,x\,(a-x)}{a}$$

X a	$a\,y^2 = p\,x\,(a-x) = a\,p\,x - p\,x^2$
diff.	$2\,a\,y\,dy = a\,p\,dx - 2\,p\,x\,dx$
: 2 a y	$dy = \frac{a\,p\,dx - 2\,p\,x\,dx}{2\,a\,y}$
: dx	$\frac{dy}{dx} = \frac{a\,p - 2\,p\,x}{2\,a\,y}$
oder	$o = \frac{a\,p - 2\,p\,x}{2\,a\,y}$
X 2 a y	$o = a\,p - 2\,p\,x$
	$2\,p\,x = a\,p$
: p	$2\,x = a$
: 2	$x = \frac{1}{2}\,a$

§. 72. **Lehrsatz.** Die Querachse ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der großen Achse und des Parameters.

Satz.

$$c = \sqrt{a\,p}$$

Beweis.

In jedem Punkte der Ellipse ist

$$y^2 = \frac{p\,x\,(a-x)}{a}$$

aber in diesen Fall $y = \frac{c}{2}$

und $y^2 = \frac{c^2}{4}$

auch ist $x = \frac{a}{2}$

Sub-

Subſtit. $\frac{c^2}{4} = \frac{p \frac{a}{2} (a - \frac{a}{2})}{a}$

$\frac{c^2}{4} = p \times \frac{\frac{a}{2}}{2}$

abgek. $\frac{c^2}{4} = \frac{ap}{4}$

$c^2 = ap$

$c = \sqrt{ap}$

§. 73. Zuſatz. Man findet aus dieſem Ausdrucke auch Aequivalente für a und p; denn es iſt $a = \frac{c^2}{p}$ und $p = \frac{c^2}{a}$, welche wir vielleicht bald zu Subſtitutionen gebrauchen können.

§. 74. Zuſatz. Der Parameter iſt demnach die dritte Proportionallinie zur großen und kleinen Achſe; denn

$c = \sqrt{ap}$

$c^2 = ap$ und in eine Proportion zerſtreut, $a : c = c : p$

§. 75. Aufgabe. Den Parameter in der Ellipſe durch Zeichnung ſichtbar zu machen.

Auflöſung. Man halbiere die größere Achſe, beſchreibe auf den Mittelpunkt derſelben die gröſte Ordinate, d. i. die halbe kleinere Achſe, verbinde die beyden Endpunkte mit einer Sehne, und errichte von der kleinern aus, auf den Endpunkt dieſer Sehne einen Perpendikel, ſo wird das Stück der großen Achſe zwiſchen dieſem Perpendikel und der kleinen Achſe den halben Parameter vorſtellen, welcher ſich leicht durch Hilfe eines Zirkelinſtruments nochmal

auf

auf der großen Achse umschlagen läßt, um den ganzen Parameter zu Gesicht zu bekommen.

Satz Fig. 24

2 d g, oder d h = p

Beweis.

Weil das Dreyeck a b g aus der Bedingung der Konstruktion rechtwinklicht ist, so läßt sich ein halber Zirkel darüber werfen, wovon a g den Diameter giebt. Nun ist wegen dem Perpendikel b d

$$a\,d : b\,d = b\,d : d\,g$$

subst. $\frac{a}{2} : \frac{c}{2} = \frac{c}{2} : d\,g$

$\times 2$ $\quad a : c = c : 2\,d\,g$

$$c^2 = a \times 2\,d\,g$$

aber $\quad c^2 = a\,p \quad$ §. 72

$$a \times 2\,d\,g = a\,p$$

$$2\,d\,g = p$$

oder $\quad d\,h = p$

§. 76. **Anmerk.** Man vergleiche diese meine Bezeichnung des Parameters mit Hildebrands seiner, und urtheile dann, welche natürlicher, einfacher und kürzer ist.

§. 77. **Aufgabe. Die Brennpunkte in der Ellipse durch Zeichnung zu bestimmen.**

Auflösung. Man beschreibe zuerst auf obige Weise den halben Parameter, trage ihn rechtwinklicht auf beyde Endpunkte der großen Achse, und lege eine Linie darüber, die wegen ihrer gleichen Entfernung von der Achse mit ihr nothwendig parallel laufen muß. Wo nun diese Parallellinie die

Kurve

Kurve schneidet, da fälle man Perpendikel oder Ordinaten auf die große Achse hin, so werden dieselben auf den Brennpunkten stehen.

Beweis. Fig. 25.

Aus der Definition des Brennpunkts ist derselbe in jedem der drey Kegelschnitte da, wo die Ordinate zum halben Parameter wird. Weil nun wegen Parallelismus $ab = cf$ und $gh = dF$, so haben diese Ordinaten den halben Parameter zum Maase; folglich müssen sie auf den Brennpunkten f und F stehen.

§. 78. **Lehrsatz.** Wenn statt der großen Achse die kleine in die Rechnung gebracht wird, so heißt die Gleichung für die Ellipse

$$y^2 = px - \frac{p^2 x^2}{c^2}$$

Beweis.

$$y^2 = \frac{px\,(a-x)}{a}$$

$$ay^2 = px\,(a-x) = apx - px^2$$

$$-apx = \quad -apx$$

$$ay^2 - apx = -px^2$$

durch $y^2 - px = y^2 - px$ div.

$$a = \frac{-px^2}{y^2-px} = \frac{px^2}{px-y^2}$$

aber $a = \frac{c^2}{p}$ §. 73.

$$\frac{c^2}{p} = \frac{px^2}{px-y^2}$$

$$\text{X p} \qquad c^2 = \frac{p^2 x^2}{p x - y^2}$$

$$\text{X}(p x - y^2) \cdot \qquad c^2 p x - c^2 y^2 = p^2 x^2$$

$$-c^2 y^2 = p^2 x^2 - c^2 p x$$

$$(: -c)^2 \qquad y^2 = \frac{p^2 x^2 - c^2 p x}{-c^2}$$

$$\text{oder} \qquad y^2 = \frac{c^2 p x - p^2 x^2}{c^2}$$

$$y^2 = px - \frac{p^2 x^2}{c^2}$$

§. 79. **Lehrsatz.** Die Gleichung für die Ellipse heißt ohne Beyziehung des Parameters

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

Beweis.

Es ist $p = \frac{c^2}{a}$

und $p^2 = \frac{c^4}{a^2}$. Diese Werthe in der Gleichung $y^2 = px - \frac{p^2 x^2}{c^2}$ substituiert, giebt

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^4 x^2}{c^2 a^2} = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

§. 80. **Lehrsatz.** Wenn die Abscissen vom Mittelpunkte angerechnet, und v genennt werden, so ist die Gleichung mit Beyziehung der großen Achse und des Parameters

$$y^2 = \tfrac{1}{4} a p - \frac{p v^2}{a} = p\left(\tfrac{1}{4} a - \frac{v^2}{a}\right)$$

Beweis.

Beweis. Fig. 29.

$$pd = ad - ap$$

oder $$v = \frac{a}{2} - x$$

und daher $x = \frac{a}{2} - v$. Dieß nun in der ersten Gleichung $y^2 = \frac{px(a-x)}{a}$ für x substituiert,

so kömmt zum Vorschein

$$y^2 = \frac{p\left(\frac{a}{2}-v\right)\left(a-\frac{a}{2}+v\right)}{a}$$

$$y^2 = \frac{p\left(\frac{a}{2}-v\right)\left(\frac{a}{2}+v\right)}{a}$$

$$y^2 = \frac{p\left(\frac{a^2}{4}-v^2\right)}{a} \text{ oder } = \frac{pa^2}{4a} - \frac{pv^2}{a}$$

$$y^2 = p\left(\frac{1}{4}a - \frac{v^2}{a}\right)$$

§. 81. Zusatz. Bringt man statt p oder a mehrmal ihre Aequivalente in die Rechnung, so erhält man im ersten Falle

$$y^2 = \frac{c^2}{a}\left(\frac{1}{4}a - \frac{v^2}{a}\right)$$

$$y^2 = \frac{c^2 a}{4a} - \frac{c^2 v^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$$

Im zweyten Falle $y^2 = p\left(\frac{c^2}{4p} - \frac{v^2}{c^2 : p}\right)$

$$y^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{p^2 v^2}{c^2}$$

§. 82.

§. 82. **Anmerk.** Um die bisher gefundenen 6 Ellipsengleichungen mit einemmal überblicken zu können, wollen wir sie der Ordnung nach, wie sie erhalten worden sind, hieher setzen.

$$1)\quad y^2 = \frac{p\,x\,(a-x)}{a}$$

$$2)\quad y^2 = p\,x - \frac{p^2\,x^2}{c^2}$$

$$3)\quad y^2 = \frac{c^2\,x}{a} - \frac{c^2\,x^2}{a^2}$$

$$4)\quad y^2 = \tfrac{1}{4}\,a\,p - \frac{p\,v^2}{a}$$

$$5)\quad y^2 = \tfrac{1}{4}\,c^2 - \frac{c^2\,v^2}{a^2}$$

$$6)\quad y^2 = \tfrac{1}{4}\,c^2 - \frac{p^2\,v^2}{c^2}$$

§. 83. **Lehrsatz.** Alle diese 6 Ellipsengleichungen lassen sich in Zirkelgleichungen umschaffen, wenn man entweders $p = a$ oder $c = a$, oder endlich $p = c = a$ setzt.

Beweis.

Denn es heißt die ursprüngliche erste Aequation vor der Substitution $y^2 = \frac{p\,x\,(a-x)}{a}$; darnach aber $y^2 = \frac{a\,x\,(a-x)}{a} = x\,(a-x) = ax - x^2$.

Die zwote $y^2 = px - \frac{p^2\,x}{c^2}$ geht in diese über: $y^2 = a\,x - \frac{a^2\,x}{a^2} = ax - x^2$

Die

Die dritte $y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$ nimmt folgende Gestalt an: $y^2 = \frac{a^2 x}{a} - \frac{a^2 x^2}{a^2}$

und abgek. $y^2 = ax - x^2$

Die vierte $y^2 = p\,(\frac{1}{4}a - \frac{v^2}{a}$ giebt

$$y^2 = a\left(\tfrac{1}{4}a - \frac{v^2}{a}\right)$$

$$y^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a v^2}{a}$$

$y^2 = \frac{1}{4}a^2 - v^2$ Eine Zirkelgleichung, wenn die Abscissen vom Mittelpunkte an gerechnet werden, und a die ganze Achse bedeutet. Denn soll der Radius oder $\frac{a}{2} = 1$ gelten, folglich $a = 2$, und wenn x gerade das, was v bedeutet, ausdrückt, so kömmt die obige Gleichung §. 73, diff. $y^2 = 1 - x^2$ zum Vorschein.

Eben so verhält sichs bey der sechsten Gleichung $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$, woraus mehrmal die nämliche Aequation $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 v^2}{a^2}$

oder abgek. $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - v^2$ d. i. $= 1 - x^2$ entspringt.

§. 84. **Zusatz.** Daraus erhellet, daß der Zirkel eigentlich nichts anders sey, als eine Gattung von Ellipsen, wo der Parameter, Kleine und große Achse einander vollkommen gleich sind.

§. 85. **Anmerk.** Ueberhaupt darf in jeder Ellipsengleichung nur statt a, c und p eine geometrische Mittelgröße zwoer dieser Linien, zum Beyspiel $\sqrt{ac}$, $\sqrt{ap}$ oder $\sqrt{cp}$

$\frac{1}{a^2}$

$a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}}$ u. s. f. substituiert und diese beständige Größe am Ende mit Einem Buchstaben, als etwa mit a bezeichnet werden, so entsteht allemal eine Zirkelgleichung. Nehmen wir unter andern die erste ursprüngliche $y^2 = \frac{px(a-x)}{a}$ her, so giebt dieß nach der Substitution

$$y^2 = \frac{a^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} x \left(a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} - x\right)}{a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}}$$

$$y^2 = x \left(a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} - x\right)$$

oder $y^2 = x (a - x)$

$$y^2 = ax - x^2$$

Es wird sogar auch weiter unten erwiesen werden, daß der Flächeninhalt jeder Ellipse der Fläche eines Zirkels gleiche, der zur Achse die mittlere Proportionallinie zwischen beyden Ellipsenachsen oder andern zwo berührten Linieu hat.

§. 86. **Lehrsatz.** Auch können die Ordinaten um noch mehrere Gleichungen zu gewinnen, auf der kleinen Achse genommen werden. Es tritt hier, wenn z die Abscisse vom Mittelpunkte und Φ die Ordinate bedeutet, die Gleichung ein

$$\Phi^2 = \tfrac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$$

Beweis. Fig. 26.

Es ist hier d b $= \Phi$

und b c $= z$ vom Mittelpunkte.

Da nun erwiesen worden, daß sonst

$$y^2 = \tfrac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$$ war,

aber

aber in unserm Fall nach gezogener Parallelinie d g

$$y = dg = bc = z$$

und $v = gc = db = \Phi$ ist;

so läßt sich substituieren. Folglich

$$z^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2\,\Phi^2}{a^2}$$

$\times a^2$ $\quad a^2\,z^2 = \tfrac{1}{4}c^2\,a^2 - c^2\,\Phi^2$

$\quad c^2\,\Phi^2 = \tfrac{1}{4}c^2\,a^2 - a^2\,z^2$

$:c^2$ $\quad \Phi^2 = \tfrac{1}{4}\,a^2 - \frac{a^2\,z^2}{c^2}$

§. 87. Zusatz. Es leuchtet von selbst ein, daß man auch auf diesem Wege wieder sechserley Gleichungen erobern könnte. Die Verfahrungsart ist die nämliche, wie oben, und die Gleichungen fallen sehr ähnlich mit den erstern aus.

§. 88. Anmerk. Ein Liebhaber von der Methode, alle Sätze in Proportionen einzukleiden, findet in den obigen 6 Gleichungen, so wie in diesen, ein weites fruchtbares Feld. So z. B. fließt aus der dritten Gleichung die bekannte Proportion: Das Quadrat der halben kleinen Achse verhält sich zum Quadrat der halben größern Achse; wie das Quadrat jeder Ordinate zum Produkte aus den Segmenten der großen Achse. Denn

$$y^2 = \frac{c^2\,x}{a} - \frac{c^2\,x^2}{a^2}$$

$\times a^2$ $\quad a^2\,y^2 = c^2\,a\,x - c^2\,x^2$

$:c^2$ $\quad \frac{a^2\,y^2}{c^2} = a\,x - x^2 = x\,(a-x)$

aufgelöset $\quad c^2 : a^2 = y^2 : x\,(a-x$

$:2$ $\quad \frac{c^2}{2} : \frac{a^2}{2} = y^2 : x\,(a-x)$

§. 89. Lehrsatz. Die Entfernung des Brennpunkts in der Ellipse vom Scheitel ist gleich der

halben großen Achse mehr oder weniger der halben Quadratwurzel aus dem Produkte dieser Achse in die Differenz zwischen der nämlichen Achse und dem Parameter.

Satz.

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a\,(a-p)}$$

Beweis.

Es ist überall $y^2 = \frac{p\,x\,(a-x)}{a}$

Allein hier $y = \tfrac{1}{2}p$

also $y^2 = \tfrac{1}{4}p^2$

Folgl. $\tfrac{1}{4}p^2 = \frac{p\,x\,(a-x)}{a}$

:p $\tfrac{1}{4}p = \frac{x\,(a-x)}{a}$

Xa $\frac{a\,p}{4} = a\,x - x^2$

$x^2 - a\,x = -\frac{a\,p}{4}$

kompl. $+\tfrac{1}{4}a^2 \qquad +\frac{a^2}{4}$

$x^2 - a\,x + \tfrac{1}{4}a^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a\,p}{4} = \frac{a\,(a-p)}{4}$

$\surd \quad x - \tfrac{1}{2}a = \pm\frac{\sqrt{a\,(a-p}}{2}$

$+\tfrac{1}{2}a \qquad +\tfrac{1}{2}a$

$x = \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a\,(a-p)}$

§. 90.

§. 90. Zusatz. In jeder Ellipse finden sich daher zween Brennpunkte vor, deren einer $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a(a-p)}$ und der andere $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a(a-p)}$

§. 91. Erkl. Die Entfernung der zween Brennpunkte selbst von einander heißt die Exzentrizität der Ellipse. Sie wird von der kleinen Achse ebenfalls in zween gleiche Theile getheilt; weil sie die große Achse ist, weniger der beyderseitigen Fokallänge.

§. 92. Zusatz. Wenn die halbe Exzentrizität von der ersten halben großen Achse abgezogen wird, so überkömmt man auch den ersten Brennpunkt: wird selbe hingegen zu der ersten halben Achse addiert, so wird der zweyte gefunden. Dieß geschieht aber in dem Ausdrucke $\frac{1}{2}a \pm \sqrt{a(a-p)}$. Folglich ist $\sqrt{a(a-p)}$ die ganze Exzentrizität der Ellipse.

§. 93. Zusatz. Diese Exzentrizität läßt sich aus jeder Gleichung unmittelbar finden, in welcher die Abscissen vom Mittelpunkte genommen sind; weil sie zur Parameterordinate als Abscisse gehört. Denn es sey

$$y^2 = \tfrac{1}{4}ap - \frac{pv^2}{a}$$

Weil nun $y = \frac{1}{2}p$

und $y^2 = \frac{1}{4}p^2$

Folglich $\frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}ap - \frac{pv^2}{a}$

$:p \quad \frac{1}{4}p = \frac{1}{4}a - \frac{v^2}{a}$

verf. $\frac{v^2}{a} = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}p = \frac{1}{4}(a-p)$

$\times a \quad v^2 = \frac{1}{4}(a^2 - ap) = \frac{1}{4}a(a-p)$

$\surd \quad v = \frac{1}{2}\sqrt{a(a-p)}$

§. 94. **Zusatz.** Wünschte man lieber, die halbe oder ganze Exzentrizität in Achsenwerthen zu haben, so darf nur statt p dessen Aequivalent $\frac{c^2}{a}$ substituiert werden. Es ist daher nach der

Substitution $v = \frac{1}{2}\sqrt{a\left(a - \frac{c^2}{a}\right)}$ und

$v = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}$, und die ganze Exzentrizität $= \sqrt{a^2 - c^2}$. Ein Ausdruck, der noch simpler als der obige ausfällt, und sich deutlicher durch Worte vortragen läßt. Es ist nämlich die ganze Exzentrizität die Wurzel aus der Differenz der beyden Achsenquadraten.

§. 95. **Zusatz.** Der nämliche Ausdruck entwickelt sich auch unmittelbar sogleich aus der 5ten Ellipsengleichung, wenn statt y der halbe Parameter und statt diesen endlich das halbe Aequivalent aus den Achsen $\frac{c^2}{2a}$ zu stehen kömmt.

Es ist diesemnach $\frac{p}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}}$

oder $\frac{c^2}{2a} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}}$

quad. $\frac{c^4}{4a^2} = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$

$: c^2$ $\frac{c^2}{4a^2} = \frac{1}{4} - \frac{v^2}{a^2}$

$\times a^2$ $\frac{c^2}{4} = \frac{1}{4}a^2 - v^2$

verf. $v^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}(a^2 - c^2)$

$\sqrt{}$ $v = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}$

§. 96.

§. 96. **Lehrsatz.** Das Produkt der Brennweite in den übrigen Theil der großen Achse ist gleich dem vierten Theil der quadrierten kleinen Achse: oder, die halbe Querachse ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Fokallänge und dem übrigen Reste der Hauptachse.

Satz

$x(a-x) = \frac{1}{4}c^2$ oder
$x : \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c : (a-x)$
} wo x die Brennweite bedeutet.

Beweis.

$$x = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}$$
$$a - x = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}$$
} §. 94.

mult. $x(a-x) = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}\sqrt{a^2-c^2} + \frac{1}{4}\sqrt{a^2-c^2} - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2$

abgek. $x(a-x) = \frac{1}{4}c^2$
oder $x : \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c : (a-x)$

§. 97. **Zusatz.** Der Lehrsatz könnte auch so eingekleidet werden: Wenn über die Hauptachse einer Ellipse ein halber Zirkel beschrieben wird, so muß die Zirkelordinate auf dem Brennpunkte der halben Querachse der Ellipse gleich seyn.

§. 98. **Zusatz.** Wenn also neben der großen Achse auch die Brennweite gegeben wird, so läßt sich die kleine Achse leicht bestimmen. Es darf nur über die Hauptachse ein Zirkel geschwungen, und auf dem Brennpunkt ein Perpendikel bis an die Peripherie errichtet werden, so muß dieß die halbe Querachse seyn.

§. 99. **Zusatz.** Endlich könnte man auch den Werth der Exzentrizität in Ausdrücken der kleinen Achse und des Parameters bestimmen: Da aber die Verfahrungsart beynahe immer die nämliche bleibt, so wollen wir das dem forschenden Fleiße der Anfänger überlassen. Es ist indessen hier $v = \frac{1}{2} c \sqrt{\frac{c^2 - 1}{p}}$

§. 100. **Lehrsatz.** Bildet man sich auf der kleinen Achse die Brennpunkte ein, so ist die halbe Excentricität daselbst, die kleine Achse multipliciert mit der Wurzel aus dem Produkte der Summe und Differenz der quadrierten beyden Achsen, alles durch die doppelte quadrierte große Achse dividiert.

Satz.

$$z = c \sqrt{\frac{(a^2 + c^2)(a^2 - c^2)}{2\,a^2}} \quad \text{oder}$$

$$z = \frac{c}{2\,a^2} \sqrt{a^4 - c^4}$$

Beweis.

Es ist hier $\Phi^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$

aber $\Phi = \frac{p}{2} = \frac{c^2}{2\,a}$

quad. $\Phi^2 = \frac{c^4}{4\,a^2}$

Folgl. $\frac{c^4}{4\,a^2} = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$

$\times c^2$

$$\times c^2 \qquad \frac{c^6}{4a^2} = \tfrac{1}{4}a^2c^2 - a^2z^2$$

$$:a^2 \qquad \frac{c^6}{4a^4} = \tfrac{1}{4}c^2 - z^2$$

$$\text{verf. } z^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^6}{4a^4} = \frac{c^2a^4 - c^6}{4a^4} = \frac{c^2(a^4 - c^4)}{4a^4}$$

$$\sqrt{\ } \quad z = \frac{c\sqrt{a^4 - c^4}}{2a^2} = \frac{c}{2a^2}\sqrt{a^4 - c^4}$$

§. 101. **Zusatz.** Wenn die zwey Achsen einander gleich gesetzt werden, so verschwinden die Exzentrizitäten auf beyden Achsen; weil $a^2 - c^2$ oder $a^4 - c^4 = 0$ werden. Es läßt sich also wieder behaupten, daß der Zirkel eine Ellipse ohne Exzentrizität sey.

§. 102. **Erkl.** Verbindet man die vier Brennpunkte der Ellipse durch gerade Linien, so entsteht ein eingeschloßner Raum, welcher das Parallelogram der Exzentrizität heißen kann, und wodurch sich die Ellipse an Quadratinhalt von dem Zirkel unterscheidet; weil dieser Raum nothwendig verschwinden muß, wenn die beyden Achsen gleiche Größen bekommen.

§. 103. **Lehrsatz.** Das Parallelogram der Exzentrizität läßt sich bestimmen: es ist, wenn der Quadratinhalt durch q bezeichnet wird, der

Satz. Fig. 27

$$q = \left(\tfrac{1}{2}c - \frac{c^3}{2a^2}\right)\sqrt{a^2 + c^2}$$

Beweis.

Beweis.

Das $\Delta\ fgF = \frac{fF}{2} \times gc$;

aber $\frac{fF}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}$ als halbe Exzent.

und $gc = \frac{c\sqrt{(a^2+c^2)\ (a^2 - c^2}}{2\,a^2}$

mult. $\frac{fF}{2} \times gc = \Delta fgF = \frac{c}{4a^2}\sqrt{(a^2+c^2)}\sqrt{(a^2-c^2)}$

$\sqrt{(a^2 - c^2)}$

$$\Delta fgF = \frac{c}{4a^2}(a^2 - c^2)\sqrt{(a^2 + c^2)}$$

$$\Delta fgF = \frac{a^2\,c - c^3}{4a^2}\sqrt{a^2 + c^2)}$$

$\times 2$ $\quad 2\,\Delta fgF = q = \frac{a^2\,c - c^3}{2a^2}\sqrt{(a^2 + c^2)}$

abgek. $\quad q = \left(\frac{1}{2}c - \frac{c^3}{2a^2}\right)\sqrt{(a^2+c^2)}$

§. 104. **Lehrsatz.** Der Brennstrahl, von der großen Achse aus, an den Endpunkt der kleinen Achse hingezogen, ist allemal gleich der halben großen Achse.

Satz. Fig. 28.

$$fc = \frac{1}{2}a$$

Beweis.

$$fc^2 = cb^2 + fb^2$$

Weil aber cb nichts anders als die halbe kleine Achse, und fb die halbe Exzentrizität ist, so kann substituiert werden;

$$f c^2 = \tfrac{1}{4} c^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}\right)^2$$

$$f c^2 = \tfrac{1}{4} c^2 + \tfrac{1}{4} a^2 - \tfrac{1}{4} c^2$$

abgek. $$f c^2 = \tfrac{1}{4} a^2$$

✓ $$f c = \tfrac{1}{2} a$$

§. 105. **Zusatz.** Daraus folgt eine sehr leichte Art, aus den beyden Achsen die Brennweiten zu bestimmen. Man darf nur durch Hilfe des Handzirkels mit der Oefnung der halben großen Achse aus dem einen Endpunkte der kleinen die große Achse beyderseits durchschneiden, so sind die Brennpunkte sichtbar gemacht.

§. 106. **Anmerk.** Herr Prof. Tanzer macht in seinem Lehrbuche IIter Theil §. 118 aus diesem Lehrsatze eine Erklärung des Brennpunkts, ohne ihn selbst vorauszuschicken. Allein es ist durchaus bekannt, daß in den dreyen Kegelschnitten da überall der Brennpunkt sey, wo der halbe Parameter die Ordinate abgiebt; folglich erwartet hier der Anfänger sehr billig eine Rechtfertigung dieser zweyten Definition; um zu zeigen, daß selbe in Rücksicht der ersten keinen Widerspruch in sich fasse.

§. 107. **Lehrsatz.** Was immer für zween entgegengesetzte Brennstrahlen, die an der Kurve einen Winkel bilden, sind zusammgenommen der großen Achse gleich.

Satz. Fig. 29.

$$f m + F m = a$$

Beweis.

1 $$f m^2 = f p^2 + m p^2$$

Da nun $$f p = f d - p d$$

oder $$= \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2} - v$$

und $$f p^2 = \tfrac{1}{4} a^2 - \tfrac{1}{4} c^2 - v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2$$

Fer-

Ferner $mp^2 = y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$ Folgl.

subſtit. $fm^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 - v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$

abgek. $fm^2 = \frac{1}{4}a^2 - v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$

$\sqrt{\quad}$ $fm = \frac{1}{2}a - \frac{v}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$

II $Fm^2 = pF^2 + mp^2$

Da hier $pF = dF + pd$

oder $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2} + v$

ſo iſt auch $pF^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 + v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2$

Subſtit. $Fm^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 + v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$

abgek. $Fm^2 = \frac{1}{4}a^2 + v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$

$\sqrt{\quad}$ $Fm = \frac{1}{2}a + \frac{v}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$

oben war $fm = \frac{1}{2}a - \frac{v}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$

---

add. $fm + Fm = a$

§. 108. **Anmerk.** Wie ſich bey den beyden Wurzelausziehungen am Ende allemal das $v^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$ aufhub, wird der Anfänger daraus leicht begreifen: weil auch das Quadrat des zweyten Theils abgezogen werden muß. Nun iſt der zweyte Theil hier unfehlbar $\frac{v}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$; folglich

macht

macht dessen Quadrat $\frac{v^2}{a^2}(a^2 - c^2) = \frac{v^2 a^2}{a^2} - \frac{v^2 c^2}{a^2}$ $= v^2 - \frac{v^2 c^2}{a^2}$. Werden nun die Zeichen verändert und addiert, so hebt sich alles auf. Da bey der Hyperbel eine ähnliche Rechnung vorkömmt, so soll diese Anmerkung auch dorthin gelten.

§. 109. **Aufgabe.** Eine Ellipse nach geometrischen Gründen zu zeichnen.

Auflösung. Man ziehe die große Achse, bestimme nach Willkühr die Brennpunkte darauf, doch so, daß die Fokallängen beyderseits gleich bleiben, und zerstücke diese Achse in was immer für zween Theile. Zum Beyspiel Fig. 30 in a c und c b, so wird, wenn man mit der Zirkelöfnung jeder dieser Segmentenweiten aus den Brennpunkten Bögendurchschnitte macht, wie hier in h, der Durchschnittspunkt in der Ellipsenlinie liegen. Geschieht die Zerstückung in a d und d b, so trift der Durchschnittspunkt in k u. s. w. Je mehr nun dergleichen Punkte mittels verschiedner Zerstückung der Achse genommen werden, desto genauer läßt sich auch die Ellipse durch diese Punkte ziehen.

Beweis. Die Brennstrahlen h f und h F, so auch k f und k F, sind der Konstruktion gemäß der großen Achse gleich. Diese Eigenschaft kömmt aber ausschlüßungsweise der Ellipse zu. Folglich ist jede Linie auf solche Art beschrieben, eine Ellipse.

§. 111. **Anmerk.** Die gewöhnliche mechanische Art, eine Ellipse zu zeichnen, geschieht durch Hilfe zweener Stifte, die in die Brennpunkte eingeschlagen werden, und einer Schnur, deren beyde Ende man an diese Stifte anknüpft. Es muß aber die Schnur etwas länger seyn als die Exzentrizität, je nachdem nämlich die Gestalt der Ellipse ausfallen soll, weil

im widrigen Falle durch die Anstrengung der Schnur keine Brennstrahlen entstehen würden, welche, wenn sie herumgeführt werden, die Ellipse geben. Der Beweis, daß diese beyden Brennstrahlen der großen Achse gleich sind, ist leicht: denn man darf nur bedenken, daß die Länge der Achse aus der doppelten Fokallänge und der ganzen Excentricität besteht; nun aber, wenn die Schnur in eine solche Lage gebracht wird, daß die Brennstrahlen keinen Winkel mehr machen, so wird das doppelte Maas der Brennweite und die ganze Exzentrizität an der Schnur sichtbar werden, folglich ist die Sache richtig.

§. 112. Aufgabe. Auf jeden Punkt der Ellipse eine Tangente hinzuziehen.

Auflösung. Man ziehe auf dem gegebnen Punkt die beyden entsprechenden Brennstrahlen zusammen, z. B. Fig. 31, wenn x der gegebne Punkt ist, f m und F m; verlängere einen derselben von aussen um die Größe des andern in gerader Richtung, (am bequemsten ist es, man setzet den kleinern Brennstrahl an den größern) wie hier d m = m f wird, und theile den durch die Verlängerung entstandnen Aussenwinkel in zween gleiche Theile, so ist diese Theilungslinie die Tangente des gegebnen Punktes.

Beweis. Richtig ist es, daß der gegebne Punkt der Ellipse in der Theilungslinie liege; weil sie durch den Winkelpunkt o der mit x einen gemeinschaftlichen Scheitel hat, der Bedingung gemäß gezogen worden. Es kömmt also hier blos darauf an, daß man untersuche ob diese Linie a b die Ellipse nicht allenfalls geschnitten habe, das heißt mit andern Worten, ob nicht noch ein Punkt derselben entweder früher oder später in der Ellipse liege. Allein, keiner dieser zween Fälle ist möglich: denn geschähe es später z. B. in b, so wäre eben dieses b ein Punkt der Ellipse, und dann müsten

$fb + Fb = a$, d. i. = der großen Achse seyn,
aber $db + bF < dF$ als Seiten eines △es
und da $db = fb$ ist, weil doch das △ dfb immer gleichschenklicht bleiben muß, so kann substituiert werden

$$fb + bF < dF$$

Nun ist $dF = a$, aus der Konstrukt.
Also auch $fb + bF < a$
Das nämliche ergiebt sich auch, wenn ein früherer Punkt c angeben wird; denn auch dießmal ist

$$cd + cF < dF \text{ oder } < a$$

§. 113. **Lehrsatz.** Die Winkel welche die Brennstrahlen mit der Tangente machen, sind überall einander gleich.

Satz. Fig. 32.

$$o = m$$

Beweis.

$s = o$ wegen der Theilung.
$s = m$ als Vertik.

---

also $o = m$

§. 114. **Anmerk.** Wenn hier wieder der Lehnsatz aus der Physik von der Gleichheit des Ein- und Ausfallwinkels abprellender Lichtstrahlen, wie oben §. 29 bey hohlen Paraboloiden, angewandt wird, so ist klar, daß in elliptischen Brennspiegeln Glut oder Flamme aus einem Fokus, brennbare Materie z. B. Schießpulver, Zunderschwamm, Holz u. d. gl. in dem andern Fokus anzünden müsse; weil alle Feuerstrahlen so gebrochen werden, daß sie sämmtlich in den andern Brennpunkt eintreffen. Eben so einleuchtend ist es, daß, wenn in elliptisch gebauten Gewölbern jemand in einem der Brennpunkte spricht, von niemand in der ganzen Halle könne gehört werden, als gerade von dem, der das Ohr im andern Brennpunkte hat. Weitere Anwendungen dieses Satzes, und zwar mit erheblichem Vortheile, lassen sich bey Sprachröhren, Beleuchtungen kleiner finsterer Gegenstände u. d. gl. anbringen.

§. 115.

Lehrsatz. Die Tangente ist in der Ellipse

$$= \frac{\sqrt{(ax - x^2)\,(a^2c^2 - 4ac^2x + 4c^2x^2 + 4a^2(ax - x^2))}}{a\,(a - 2x)}$$

Beweis.

Man suche mehrmal für die Formel jeder Kurvatangente $\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$ in der differenzierten Gleichung ihr Aequivalent, so wird sich der Satz bestättigen.

Es ist unter andern auch $y^2 = \frac{c^2x}{a} = \frac{c^2x^2}{a^2} = \frac{ac^2x - c^2x^2}{a^2}$

diff. $2ydy = \frac{ac^2dx - 2c^2xdx}{a^2}$

quad. $4y^2dy^2 = \frac{a^2c^4dx^2 - 4ac^4xdx^2 + 4c^4x^2dx^2}{a^4}$

$dy^2 = \frac{a^2c^4dx^2 - 4ac^4xdx^2 + 4c^4x^2dx^2}{4a^4y^2}$

$+ dx^2 \quad + dx^2$

dy^2

$$dy^2 + dx^2 = \frac{a^2 c^4 dx^2 - 4 a c^4 x dx^2 + 4 c^4 x^2 dx^2}{4 a^4 y^2} + dx^2$$

$$= \frac{a^2 c^4 dx^2 - 4 a c^4 x dx^2 + 4 c^4 x^2 dx^2 + 4 a^4 y^2 dx^2}{4 a^4 y^2}$$

$\times y^2$ $\quad y^2 (dy^2 + dx^2) = \frac{a^2 c^4 dx^2 - 4 a c^4 x dx^2 + 4 c^4 x^2 dx^2 + 4 a^4 y^2 dx^2}{4 a^4}$

Für y^2 in der zwoten Seite der Gleichung substituiert

$$y^2 (dy^2 + dx^2) = a^2 c^4 dx^2 - 4 a c^4 x dx^2 + 4 c^4 x^2 dx^2 + 4 a^4 \left(\frac{a c^2 x - c^2 x^2}{a^2}\right) dx^2$$

$$\text{oder} \quad = \frac{c^2 dx^2}{4 a^4} (a^2 c^2 - 4 a c^2 x + 4 c^2 x^2 + 4 a^2 (a x - x^2)$$

$\surd$ $\quad y \surd (dy^2 + dx^2) = \frac{c\, dx}{2 a^2} \surd (a^2 c^2 - 4 a c^2 x + 4 c^2 x^2 + 4 a^2 (ax - x^2))$

Weg: dy $\quad \frac{y \surd (dy^2 + dx^2)}{dy}$, oder Tang. $= \frac{c}{2 a^2} \times \frac{dx}{dy} \surd (a^2 c^2 - 4 a c^2 x + 4 c^2 x^2 + 4 a^2 (ax - x^2))$

Den Ausdruck $\frac{dx}{dy}$ nochmal aus der differenzierten Gleichung in endlichen Größen bestimmt:

$$2ydy = \frac{ac^2\,dx - 2c^2x\,dx}{a^2}$$

$\times a^2$ $\quad 2a^2ydy = ac^2\,dx - 2c^2x\,dx$

$:(ac^2 - 2c^2x)$ $\quad \frac{2a^2ydy}{ac^2 - 2c^2x} = dx$

$:dy$ $\quad \frac{2a^2y}{ac^2 - 2c^2x} = \frac{dx}{dy}$ Weil aber $y = \sqrt{\frac{acx - c^2x^2}{a^2}}$, so ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2a^2\sqrt{(ac^2x - c^2x^2):a^2}}{ac^2 - 2c^2x} = \frac{2a^2\sqrt{c^2(ax - x^2)}}{c^2(a - 2x} = \frac{2ac\sqrt{ax - x^2}}{c^2(a - 2x} = \frac{2a\sqrt{ax - x^2}}{c(a - 2x)}$$

In der obigen Gleichung substituiert, giebt

$$\text{Tang} = \frac{c}{2a^2} \times \frac{2a\sqrt{ax - x^2}}{c(a - 2x)} \times \sqrt{a^2c^2 - 4ac^2x + 4c^2x^2 + 4a^2(ax - x^2)}$$

$$\text{abgek.} = \frac{\sqrt{(ax - x^2)\,(a^2c^2 - 4ac^2x + 4c^2x^2 + 4a^2(ax - x^2))}}{a(a - 2x)}$$

S. 116.

§. 116. **Anmerk.** Um sich zu überzeugen, daß dieser Ausdruck wirklich der Tangente gleich sey, darf nur $a = c$ gesetzt werden, und sie muß am Ende auf die Tangente des Zirkels zusamm fallen. Noch kürzer wird die Prüfung seyn, wenn sowohl für a als für $c = 1$ angenommen wird. Man bekömmt in diesem Falle

$$\frac{\sqrt{(x - x^2) \times 1 - 4x + 4x^2 + 4x - 4x^2}}{1 - 2x} = \frac{\sqrt{x - x^2}}{1 - 2x}$$

und dieß ist auch wirklich die Tangente des Zirkels. Denn weil die Subtangente nach §. 37, wenn $a = 1$ gesetzt wird, den Ausdruck bekömmt $\frac{2(x - x^2)}{1 - 2x}$, und die Tangente nichts anders ist, als die Hypothenuse des rechtwinklichten Dreyecks, welches mit eben derselben die Subtangente und die Ordinate schliessen, folglich ist im Zirkel

$$\text{Tang}^2 = \left(\frac{2x - 2x^2}{1 - 2x}\right)^2 + y^2$$

oder wenn statt y sein Werth gesetzt wird

$$\text{Tang}^2 = \left(\frac{2x - 2x^2}{1 - 2x}\right)^2 + x - x^2$$

$$\text{Tang}^2 = \frac{4x^2 - 8x^3 + 4x^4}{1 - 4x + 4x^2} + x - x^2$$

$$\text{Tang}^2 = \frac{4x^2 - 8x^3 + 4x^4 + x - 4x^2 + 4x^3 - x^2 + 4x^3 - 4x^4}{1 - 4x + 4x^2}$$

abgek. $$\text{Tang}^2 = \frac{x - x^2}{1 - 4x + 4x^2}$$

$$\text{Tang} = \frac{\sqrt{x - x^2}}{1 - 2x}$$

§. 117. **Anmerk.** Leichter ist die Mühe zwar ungemein, wenn vorher die Subtangente der Ellipse gefunden wird, weil alsdann in dem rechtwinklichten Dreyecke, welches, wie gerade in der vorigen Anmerkung gesagt worden, Tangente, Subtangente und die Ordinate bilden, alles bis auf eben diese Größe bekannt ist: aber ich wollte geflissentlich durch diese vornichte Bahn zur Wahrheit gelangen, um die Differentialrechnung mehr gang und gäbe zu machen.

§. 118. **Lehrsatz.** Die Subtangente ist

$$\frac{2x(a-x)}{a-2x}$$

Beweis.

$$2ydy = \frac{ac^2dx - 2c^2xdx}{a^2}$$

$\times a^2$ $\quad 2a^2ydy = ac^2dx - 2c^2xdx$

$$\frac{2a^2ydy}{ac^2 - 2c^2x} = dx$$

$\times y$ $\quad \frac{2a^2y^2dy}{c^2(a-2x)} = ydx$

$:dy$ $\quad \frac{2a^2y^2}{c^2(a-2x)} = \frac{ydx}{dy} = \text{Subt.}$

statt y^2 subst. $\frac{2a^2\left(\frac{c^2ax - c^2x^2}{a^2}\right)}{c^2(a-2x)} = \text{Subt.}$

abgek. $\frac{2(ax-x^2)}{a-2x}$ oder $\frac{2x(a-x)}{a-2x} = \text{Subt.}$

§. 119. **Anmerk.** Um öfter zu zeigen, daß durch die verschiedensten Methoden am Ende doch immer die nämliche Wahrheit erzielt wird, so wollen wir durch Hilfe der Subtangente noch einmal die Tangente bestimmen. Es wird sich die nämliche Formel ergeben, die wir oben durch die Differentialrechnung gewonnen haben. Wegen dem rechtwinklichten Dreyecke ist demnach Fig. 31

$$tm^2 = tp^2 + mp^2$$

oder $\quad \text{Tang}^2 = \text{Subt}^2 + y^2$. Für beydes

subst. $\quad \text{Tang}^2 = \left(\frac{2ax-2x^2}{a-2x}\right)^2 + \frac{ac^2x - c^2x^2}{a^2}$

$$\text{Tang}^2 = \frac{4a^2x^2 - 8ax^3 + 4x^4}{(a-2x)^2} + \frac{ac^2x - c^2x^2}{a^2}$$

zu

Zu gleichen Nennern gebracht, giebt demnach $\text{Tang}^2 =$

$$\frac{4a^4x^2-8a^3x^3+4a^2x^4+a^3c^2x-4a^2c^2x^2+4ac^2x^3}{a^2(a-2x)^2}$$

abgek. $\text{Tang}^2 = \frac{4a^4x^2-8a^3x^3+4a^2x^4}{a^2(a-2x)^2}$,

$$\frac{+a^3c^2x-5a^2c^2x^2+8ac^2x^3-4c^2x^4}{a^2(a-2x)^2}$$

Wird nun der Zähler dieses Bruches durch den Faktor $ax-x^2$ dividiert, so erhält man zum Quotus den andern Faktor $4a^3x-4a^2x^2+a^2c^2-4ac^2x+4c^2x^2$, oder was eins ist $a^2c^2+4x(a^3-a^2x-ac^2+c^2x)$

Folgl. $\text{Tang}^2 = \frac{(ax-x^2)(a^2c^2+4x(a^3-a^2x-ac^2+c^2x))}{a^2(a-2x)^2}$

$$\text{Tang} = \frac{\sqrt{(ax-x^2)(a^2c^2-ac^2x+4c^2x+4a^2(ax-x^2))}}{a(a-2x)}$$

§. 120. **Lehrsatz.** Wenn die Abscisse zur halben Achse wird, so ist Tangente und Subtangente einander gleich, das heißt sie sind beyde unendlich.

Voraussetzung.

$$x = \tfrac{1}{2}a$$

Satz.

$$\text{Tang.} = \text{Subt.} = \infty$$

Beweis.

1) Erwiesen wurde, daß

$$\text{Tang} = \frac{\sqrt{(ax - x^2)(a^2c^2 + 4x(a^3 - a^2x - ac^2 + c^2x))}}{a\,(a - 2x)}$$

Nun für x das vorausgesetzte $\frac{1}{2}$ a substituiert

$$\text{Tang} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\left(a^2c^2 + \frac{4a}{2}\left(\frac{a^3}{2} - a^3 - ac^2 + \frac{c^2a}{2}\right)\right)}}{a\left(a - \frac{2a}{2}\right)}$$

$$\text{Tang} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}a^2\left(a^2c^2 + 2a\left(\frac{a^3}{2} - \frac{ac^2}{2}\right)\right)}}{a \times (a - a)}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{4}a^2\left(a^2c^2 + a^4 - \frac{a^2c^2}{4}\right)}}{0} = \infty$$

folglich Tang $= \infty$

2) Ferner Subt. $= \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$

Substituiert Subt. $= \frac{\frac{2a^2}{2} - \frac{2a^2}{4}}{a - \frac{2a}{2}}$

Subt. $= \frac{a^2 - \frac{1}{2}a^2}{a - a}$

Subt. $= \frac{\frac{1}{2}a^2}{0} = \infty$. Da nun auch

Tang $= \infty$

so ist Tang $=$ Subt $= \infty$

§. 121. **Lehrsatz.** Die Subnormal in der Ellipse ist $\frac{a c^2 - 2 c^2 x}{2 a^2}$ oder $c^2 \left(\frac{a - 2x}{2 a^2}\right)$

Beweis.

$$2 y dy = \frac{a c^2 dx - 2 c^2 x dx}{a^2}$$

$$:2 \qquad y dy = \frac{a c^2 dx - 2 c^2 x dx}{2 a^2}$$

$$:dx \qquad \frac{y dy}{dx} = \frac{a c^2 - 2 c^2 x}{2 a^2}$$

aber $\frac{y dy}{dx} =$ Subnorm.

---

also Subnorm. $\frac{a c^2 - 2 c^2 x}{2 a^2} = c^2 \left(\frac{a - 2x}{2 a^2}\right)$

§. 122. **Lehrsatz.** Die Normal ist in der Ellipse $\frac{\sqrt{a^2 c^2 + 4 x (a^3 c - c^2 a^2 x - a c^3 + c^4 x}}{2 a^2}$

Beweis. Fig. 31

In dem Δ m p q ist

$$m q^2 = p q^2 + m p^2$$

oder $\text{Norm}^2 = \text{Subnorm}^2 + y^2$

subst. $= \left(\frac{a c^2 - 2 c^2 x}{2 a^2}\right)^2 + \frac{a c x - c^2 x^2}{a^2}$

$$= \frac{a^2 c^4 - 4 a c^4 x + 4 c^4 x^2}{4 a^4} + \frac{a c x - c^2 x^2}{a^2}$$

Die

Die Nenner gleich gemacht, d. i. die Zähler und Nenner des zweyten Bruches durch $4a^2$ multipliciert

$$\text{Norm}^2 = \frac{a^2c^4 - 4ac^4x + 4c^4x^2 + 4a^3cx - 4a^2c^2x^2}{4a^4}$$

abgek. $$\text{Norm}^2 = \frac{a^2c^4 + 4x(a^3c - ac^4 + c^4x - a^2c^2x)}{4a^4}$$

$$\text{Norm} = \frac{\sqrt{a^2c^4 + 4x(a^3c - ac^4 + c^4x - a^2c^2x)}}{2a^2}$$

§. 123. **Anmerk.** Setzt man $c = a$, so kömmt zum Vorschein

$$\text{Norm} = \frac{\sqrt{a^6 + 4x(a^4 - a^4 + a^4x - a^4x)}}{2a^2}$$

$$\text{Norm} = \frac{\sqrt{a^6}}{2a^2} = \frac{a^3}{2a^2} = \frac{a}{2}$$

die Normal vom Zirkel; weil bekannt ist, daß jeder Halbmesser perpendikulär auf seiner Tangente steht, folglich die Normal abgiebt.

§. 124. **Lehrsatz.** Wenn die Abscisse zur halben großen Achse wird, so verwandelt sich die Normal in die halbe kleine Achse, und die Subnormal verschwindet gänzlich.

Voraussetzung.

$$x = \tfrac{1}{2}a$$

Sätze.

1) Norm. $= \frac{1}{2}c$

2) Subnorm. $= 0$

Erster

Erſter Beweis.

Es iſt Norm $= \frac{c}{2a} \sqrt{a^2 c^2 + 4x(a^3 - a^2 x - a c^2 + c^2 x)}$. Statt x ſubſtituiert

$$\text{Norm} = \frac{c}{2a^2} \sqrt{a^2 c^2 + 2a\left(a^3 - \frac{a^3}{2} - a c^2 + \frac{c^2 a}{2}\right)}$$

$$\text{abgek.} = \frac{c}{2a^2} \sqrt{a^2 c^2 + 2a\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a c^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{c}{2a^2} \sqrt{a^2 c^2 + a^4 - a^2 c^2}$$

$$= \frac{c}{2a^2} \sqrt{a^4}$$

$$= \frac{c a^2}{2 a^2}$$

$$\text{Norm} = \tfrac{1}{2} c$$

Zweyter Beweis.

$$\text{Subnorm} = c^2 (a - 2x)$$

ſtatt x wird $\frac{1}{2}$ a ſubſtituiert, ſo entſteht

$$\text{Subnorm} = \frac{c^2 (a - a)}{2 a^2}$$

$$\text{abgek.} = \frac{c^2 \times 0}{2 a^2} = \frac{0}{2 a^2}$$

Folgl. Subnorm $= 0$

§. 125. **Anmerk.** Wir haben hier mit Abſicht die einzige Gleichung, wo ſtatt des Parameters die kleine Achſ in die Rechnung gebracht iſt, zur Findung der Tangente, Subtangente, Normal und Subnormal gebraucht; weil die beyden Achſen bey jeder Ellipſe unmittelbar ſogleich in die Augen fallen. Es ſieht jeder von ſelbſt, daß auch andere Gleichungen,

gen, wo nicht alle, dazu dienlich wären. Zur vollen Ueberzeugung soll die Subtangente von der kleinen Achse aus bestimmt werden. Man muß dießfalls die Aequation $\Phi^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$ in den Differentialkalkul aufnehmen. Weil aber hier z eine Abscisse vom Mittelpunkte an gerechnet bedeutet, so wird es gut seyn, statt selber ein Aequivalent von Scheitelabscissen zu setzen. Bezeichne man eine solche dem Φ entsprechende Abscisse durch Ψ, so ist sehr natürlich, wie dieß aus Fig. 32 erhellet, wo $ap = ac - pc$,

daß $\Psi = \frac{c}{2} - z$ und $z = \frac{c}{2} - \Psi$ sey

Folglich $z^2 = \frac{1}{4}c^2 - c\Psi + \Psi^2$

Subst it in $\Phi^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$ giebt

$$\Phi^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{c^2}\left(\frac{1}{4}c^2 - c\Psi + \Psi^2\right)$$

wirkl. mult. $\Phi^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 \frac{+a^2 c\Psi - a^2\Psi^2}{c^2}$

abgek. $\Phi^2 = \frac{a^2 c\Psi - a^2\Psi^2}{c^2}$

diff. $2\Phi d\Phi = \frac{a^2 c\, d\Psi - 2a^2\Psi d\Psi}{c^2}$

$\times c^2$ $2c^2\Phi d\Phi = a^2 c\, d\Psi - 2a^2\Psi d\Psi$

$$\frac{2c^2\Phi d\Phi}{a^2 c - 2a^2\Psi} = d\Psi$$

$\times\Phi$ $$\frac{2c^2\Phi^2 d\Phi}{a^2 c - 2a^2\Psi} = \Phi d\Psi$$

$:d\Phi$ $$\frac{2c^2\Phi^2}{a^2 c - 2a^2\Psi} = \frac{\Phi d\Psi}{d\Phi} = \text{Subt.}$$

statt Φ^2 den Werth $\frac{a^2 c\Psi - a^2\Psi^2}{c^2}$ gesetzt

kömmt

kömmt $\dfrac{2c^2\left(\dfrac{a^2c\psi - a^2\psi^2}{c^2}\right)}{a^2c - 2a^2\psi} = \text{Subt.}$

abgek. $\dfrac{2c\psi - 2\psi^2}{c - 2\psi} = \text{Subt.}$

Es ist dieß der nämliche Ausdruck wie bey der großen Achse. Setze man, die Funktion ψ wachse so lange bis sie $= \frac{1}{2}c$ wird, so verwandelt sich die Formel in diese: $\dfrac{2c^2 - \frac{2c^2}{2}}{c - 2c} = \dfrac{c^2 - \frac{c^2}{2}}{c - c}$

$$= \frac{2c^2 - c^2}{2c - 2c} = \frac{c^2}{0} = \infty$$

Wo also gleiche Eigenschaft wieder Platz hat, wie oben §. 120.

§. 126. **Aufgabe. Die Ellipse zu rektificieren.**

Auflösung. Man differenziere die simpelste Gleichung z. B.

$$y^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$$

giebt $2ydy = -\dfrac{2c^2 v\,dv}{a^2}$

$$: 2 \qquad ydy = -\frac{c^2 v\,dv}{a^2}$$

$$\text{quad. } y^2 dy^2 = \frac{c^4 v^2 dv^2}{a^4}$$

div.

div. durch $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2} = \frac{\frac{1}{4}a^2 c^2 - c^2 v^2}{a^2} = \frac{a^2 c^2 - 4 c^2 v^2}{4 a^2}$

$$dy^2 = \frac{c^4 v^2 dv^2}{a^4} \times \frac{4 a^2}{a^2 c^2 - 4 c^2 v^2} = \frac{4 a^2 c^4 v^2 dv^2}{a^6 c^2 - 4 a^4 c^2 v^2}$$

den Bruch verkl. durch $a^2 c^2$ giebt $= \frac{4 c^2 v^2 dv^2}{a^4 - 4 a^2 v^2}$

$$dy^2 + dv^2 = \frac{4 c^2 v^2 dv^2}{a^4 - 4 a^2 v^2} + dv^2 = \frac{4 c^2 v^2 dv^2 + a^4 dv^2 - 4 a^2 v^2 dv^2}{a^4 - 4 a^2 v^2}$$

oder $= dv^2 \left(\frac{4 c^2 v^2 + a^4 - 4 a^2 v^2}{a^4 - 4 a^2 v^2}\right) = \frac{dv^2}{a^2} \left(\frac{4 c^2 v^2 + a^4 - 4 a^2 v^2}{a^2 - 4 v^2}\right)$

$$\sqrt{(dy^2 + dv^2)} = \frac{dv}{a} \sqrt{\frac{4 c^2 v^2 + a^4 - 4 a^2 v^2}{a^2 - 4 v^2}} = \frac{dv}{a} \sqrt{\frac{a^4 + 4 c^2 v^2 - 4 a^2 v^2}{a^2 - 4 v^2}}$$

$$= \frac{dv}{a} \sqrt{\frac{a^4 + (4 c^2 - 4 a^2) v^2}{a^2 - 4 v^2}}$$

ogo

oder endlich $= \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{a^4 - 4(a^2 - c^2)v^2}{a^2 - 4v^2}}$

Setzt man endlich aus Bequemlichkeit $4(a^2 - c^2) = m$ so erscheint $\sqrt{(dy^2 + dv^2)} = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{a^4 - mv^2}{a^2 - 4v^2}}$. Nun noch aus Zähler und Nenner die Wurzel nach dem Binomiallehrsatze ausgezogen, so erhält man erstens

$$(a^4 - mv^2)^{\frac{1}{2}} = a^{4\times\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a^{4\times-\frac{1}{2}}\times -mv^2 + \frac{\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}}{1\times2}a^{4\times-\frac{3}{2}}\times +(mv^2)^2 + \frac{\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}\times-\frac{3}{2}}{1\times2\times3}a^{4\times-\frac{5}{2}}\times -(mv^2)^3$$

abgek. $= a^2 - \frac{mv^2}{2a^2} - \frac{m^2v^4}{8a^6} - \frac{m^3v^6}{16a^{10}} \ldots\ldots$

Zweytens $(a^2 - 4v^2)^{\frac{1}{2}} = a^{2\times\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a^{2\times-\frac{1}{2}}\times -4v^2 + \frac{\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}}{1\times2}a^{2\times-\frac{3}{2}}\times +(4v^2)^2 + \frac{\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}\times-\frac{3}{2}}{1\times2\times3}a^{2\times-\frac{5}{2}}\times -(4v^2)^3 \ldots\ldots$

abgek.

abgek. $= a - \frac{4v^2}{2a} - \frac{16v^4}{8a^3} - \frac{64v^6}{16a^5} \ldots\ldots$

noch mehr $= a - \frac{2v^2}{a} - \frac{2v^4}{a^3} - \frac{4v^6}{a^5} \ldots\ldots$

Weil aber $m = 4a^2 - 4c^2$
und $m^2 = 16a^4 - 32a^2c^2 + 16c^4$
wie auch $m^3 = 64a^6 - 192a^4c^2 + 192a^2c^4 - 64c^6$, so kann in der Reihe dafür substituiert werden.

Folglich $a^2 - \frac{4a^2v^2}{2a^2} + \frac{4c^2v^2}{2a^2} - \frac{16a^4v^4}{8a^6} + \frac{32a^2c^2v^4}{8a^6} - \frac{16c^4v^4}{8a^6} - \frac{64a^6v^6}{16a^{10}}$

$+ \frac{192a^4c^4v^6}{16a^{10}} - \frac{192a^2c^4v^6}{16a^{10}} + \frac{64c^6v^6}{16a^{10}} \ldots\ldots$

Abgek. $a^2 - 2v^2 + \frac{2c^2v^2}{a^2} - \frac{2v^4}{a^2} + \frac{4c^2v^4}{a^4} - \frac{2c^4v^4}{a^6} - \frac{4v^6}{a^4} + \frac{12c^2v^6}{a^6} - \frac{12c^4v^6}{a^8}$

$+ \frac{4c^6v^6}{a^{10}} \ldots\ldots$

Daher

Und durch $a - \frac{2v^2}{a} - \frac{2v^4}{a^3} - \frac{4v^6}{a^5} \ldots\ldots$ div., giebt $a + \frac{2c^2v^2}{a^3} + \frac{8c^2v^4}{a^5} - \frac{2c^4v^4}{a^7} \ldots$

Daher $\sqrt{dv^2+dy^2} = \frac{dv}{a}\left(a+\frac{2c^2v^2}{a^3}+\frac{8c^2v^4}{a^5}-\frac{2c^4v^4}{a^7}\ldots\right)$

$= dv+\frac{2c^2v^2dv}{a^3}+\frac{8c^2v^4dv}{a^6}-\frac{2c^4v^4dv}{a^8}\ldots$

$S(\sqrt{dv^2+dy^2}) = v+\frac{2c^2v^3}{3a^4}+\frac{8c^2v^5}{5a^6}-\frac{2c^4v^5}{5a^8}\ldots$

oder $v+\frac{2c^2v^3}{3a^4}+\left(\frac{8a^2c^2-2c^4}{5a^8}\right)v^5\ldots$ Sezt man nun $v = \frac{1}{2}a$ so ist der vierte Theil der Ellipse rektificiert:

$\frac{1}{2}a+\frac{2c^2a^3}{24a^4}+\frac{(8a^2c^2-2c^4)a^5}{5\times 32a^8}\ldots$

abgek. $\frac{1}{2}a+\frac{c^2}{12a}+\frac{8a^2c^2-2c^4}{160a^3}\ldots$ Dieß viermal genommen, giebt die ganze rektificierte Ellipse

$2a+\frac{c^2}{3a}+\frac{8a^2c^2-2c^4}{40a^3}\ldots = 2a+\frac{c^2}{3a}+\frac{4a^2c^2-c^4}{20a^3}\ldots$

§. 127. **Zusatz.** Wird $a = c = 2$, so erhält man wieder die Rektifikation des Zirkels in Halbmeßern wie §. 72. Diff.

$$4 + \frac{4}{6} + \frac{8 \times 4 \times 4 - 5 \times 16}{10 \times 8} \ldots$$

$$4 + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} \ldots$$

§. 128. **Zusatz.** Indeß fällt bey Bestimmung der Länge einer Ellipsenlinie die Sache doch allemal anderst aus, wenn ein Zirkel, welcher zum Diameter die geometrische Mittelgröße beyder ihrer Achsen hat; und wenn die Ellipse selbst berechnet wird: obwohl es in Rücksicht der Quadratur und Kubatur, wie wir hören werden, immerhin wahr bleibt, daß die beyden Rechnungen am Ende auf eins hinaus laufen. Denn bildet man sich eine Ellipse ein, deren kleine Achse unendlich klein ist, wie der Fall doch sehr wohl Möglichkeit zuläßt, so ist klar, daß die Länge einer solchen Ellipsenlinie der doppelten großen Achse ungemein nahe kommen muß, und dieß erhält man auch aus der Reihe. Es sey nämlich $c = \frac{1}{\infty}$ so ergiebt sich

$$2a + \frac{\frac{1}{\infty 2}}{3a} + \frac{4a^2 \frac{1}{\infty 2} - \frac{1}{\infty 4}}{20a^3} \ldots$$ wo alle

übrigen Glieder nach §. 18 Diff. bis auf $2a$ verschwinden; welches aber, wenn $a = a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}$ gedacht wird, bey Zirkel niemals wahr seyn kann; weil schon nothwendig das erste Glied unendlich klein seyn muß, ohne erst von den übrigen Gliedern zu reden.

§. 129. **Anmerk.** Ich kann nicht umhin, ein Beyspiel zu einiger Anwendung dieser unsrer Rektifikation hier einzuweben. Irgendwo mußte eine Rennbahn, weil es die Lage des Platzes nicht anders verstattete, elliptisch ausgesteckt

werden.

werden. Die größte Länge des in der Mitte eingefangten Raumes betrug 472 Schritte, und die Breite desselben 280 Schritte. Wie viel dergleichen Schritte mag beyläufig diese Rennbahn groß seyn?

Auflösung. Diese angegebne Länge und Breite stellen nichts anders als Achsen der elliptischen Rennbahn vor. Daher ist in diesem besondern Fall die Reihe

$$= 2 \times 472 + \frac{280^2}{3 \times 470} + \frac{4 \times 472^2 \times 280^2 - 280^4}{20 \times 472^3} \ldots$$

$$= 944 + \frac{78400}{1416} + \frac{6986506240 0 - 6146560000}{2103081960}$$

$= 944 + 55 + 30 + 5 \ldots = 1034$ Schritte ungefähr.

§. 130. Aufgabe. Eine Ellipse quadrieren.

Auflösung. Es werde in einer der sechs Gleichungen ein Aequivalent für ydx oder ydv gefunden und integriert, so erhält man, wenn v oder $x = \frac{1}{2}a$ gesetzt wird, den vierten Theil der Ellipsenfläche. Z. B. wieder in

$$y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2} = \frac{\frac{1}{4}a^2 c^2 - c^2 v^2}{a^2} = \frac{a^2 c^2 - 4 c^2 v^2}{4 a^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{a^2 c^2 - 4 c^2 v^2}{4 a^2}} = \frac{c}{2a}\sqrt{a^2 - 4 v^2}$$

$$x\,dv \qquad y\,dv = \frac{c\,dv}{a^2}\sqrt{a^2 - 4 v^2}$$

Aus $a^2 - 4v^2$ wirkl. die Wurzel gezogen

$$\sqrt{a^2 - 4v^2} = (a^2 - 4v^2)^{\frac{1}{2}} = a^{2 \times \frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} a^{2 \times -\frac{1}{2}} \times -$$

$$4v^2 + \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}}{1 \times 2} a^{2 \times -\frac{3}{2}} \times + 16 v^4 \ldots$$

oder

$$\text{oder} = a - \frac{2v^2}{a} - \frac{2v^4}{a^3} \ldots$$

$$\text{Folgl. } y\,dv = \frac{c\,dv}{2a}\left(a - \frac{2v^2}{a} - \frac{2v^4}{a^3} \ldots\right) \text{ oder}$$

$$y\,dv = \frac{c\,dv}{2} - \frac{cv^2\,dv}{a^2} - \frac{cv^4\,dv}{a^4} \ldots$$

$$S(y\,dv) = \frac{cv}{2} - \frac{cv^3}{3a^2} - \frac{cv^5}{5a^4} \ldots$$

Das $v = \frac{a}{2}$ gesetzt, giebt den Quadranten

$$S(y\,dv) = \frac{ac}{4} - \frac{ac}{24} - \frac{ac}{40} \ldots$$

Durch 4 mult., so ist

$$\text{Quadratura Ellipf.} = ac - \frac{ac}{6} - \frac{ac}{160} \ldots$$

§. 131. Zusatz. Setzt man $a = c = 2$, so verwandelt sich diese Reihe in jene des Zirkels $4 - \frac{4}{6} - \frac{4}{10} \ldots = 4 - \frac{2}{3} - \frac{1}{10} \ldots$ wie §. 76 Diff. oder ist $a = c = d$, $d^2 - \frac{d^2}{6} - \frac{d^2}{40} \ldots$

§. 132. Zusatz. Das nämliche ergiebt sich, wenn für a und c die geometrische Mittelgröße $\sqrt{ac}$ oder $a^{\frac{1}{2}}\,c^{\frac{1}{2}}$ in die Reihe aufgenommen wird, und diese beständige Quantität z. B. durch $2r$ ausgedruckt wird.

$$a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}}{6} - \frac{a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}}{40}$$

$$\text{oder } 4r^2 - \frac{4r^2}{6} - \frac{4r^2}{40} \ldots$$

$$4r^2 - \frac{2}{3}r^2 - \frac{1}{10}r^2 \ldots$$

§. 133. Zusatz. Es ist nun zum drittenmale erwiesen, daß es eines sey, ob man eine Ellipse berechnet oder einen Zirkel, der zum Diameter die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Achsen hat.

Der förmliche Beweis von diesem Satze sieht so aus.

Voraussetzung.

$$d = \sqrt{ac}$$

Satz.

Circ. = Ellipf.

Beweis.

$$C = d^2 - \frac{d^2}{6} - \frac{d^2}{40} \ldots$$

$$E = ac - \frac{ac}{6} - \frac{ac}{40} \ldots$$

$$C : E = \left(d^2 - \frac{d^2}{6} - \frac{d^2}{40} \ldots\right) : \left(ac - \frac{ac}{6} - \frac{ac}{40} \ldots\right)$$

$$\text{oder} \quad = d^2\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} \ldots\right) : ac\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} \ldots\right)$$

$$C : E = d^2 : ac$$

aber $d = \sqrt{ac}$

also $d^2 = ac$ subst.

$C : E = d^2 : d^2$ und

$: d^2 \quad d^2 C = d^2 E$

$C = E$

§. 134. **Lehrsatz.** Der Quadratinhalt einer Ellipse ist beynahe der vierte Theil des Produkts aus den beyden Achsen und der Zahl 3, 14...

Satz.

$$\text{Quad. Ellipf.} = \frac{a\,c\,\pi}{4}$$

Beweis.

Im Zirkel ist $q = \frac{d^2\,\pi}{4}$

aber in einer gleichgroßen Ellipse ist

$$d = a^{\frac{1}{2}}\,c^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a\,c}$$

und $$d^2 = a\,c$$

Subſtit.

$$\text{Quad. Ellipf.} = \frac{a\,c\,\pi}{4}$$

§. 135. **Anmerk.** Wir halten uns zu lange auf, auch verſchiedne Abſchnitte der Ellipſe, wie bey der Parabel, zu berechnen. Daß aber indeß die Sache möglich ſey, ſieht aus dem bisherigen jeder von ſelbſt.

§. 136. **Aufgabe.** Jede Ellipſe durch Zeichnung in einen Zirkel zu verwandeln.

Auflöſung. Man ſetze in gerader Richtung die halbe kleine Achſe an die halbe große Achſe, ſchwinge um dieſe beyden Achſenhälften einen halben Zirkel und fälle von der Peripherie auf dem Zuſammenſtoſſungspunkt einen Perpendikel herab, ſo iſt dieß der Radius eines Zirkels, der gleiche Flächengröße mit der Ellipſe hat.

Satz. Fig. 35.

$$a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} = k m$$

Beweis.

Es ist $ab : bd = bd : bc$ oder nach der Subst. $\frac{a}{2} : \frac{mk}{2} = \frac{mk}{2} : \frac{c}{2}$

$$a : mk = mk : c \qquad 2X$$

$$ac = mk^2$$

$$a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} = mk$$

§. 137. **Anmerk.** Eine kleine Anwendung hierüber fürs Praktische. Irgend ein französischer Mahler war gewohnt seine Freskogemälde nach Quadratmaaß zu übernehmen, und sich für den Schuh 4 Livers zahlen zu lassen. Nun sollte er ein großes Plafond mahlen, das eine wahre elliptische Figur hatte von 55 Fuß Länge und 33 Fuß Breite. Er föderte gemäß seinem Ueberschlage 6000 Livers. Es fragt sich demnach, ob diese Foderung billig war?

Auflösung. Weil $q = \frac{ac\pi}{4}$ ist, so darf nur substituiert werden: folglich

$$q = \frac{55 \times 33 \times 3{,}14..}{4} = \frac{5699{,}1}{4} = 1424{,}7 \text{ □schuh.}$$

Dieß mit 4 multipliciert, giebt 5698,8 Livers. Er hat daher um 301,2 Livers zu viel gefodert.

§. 138. **Erkl.** Dreht sich die Ellipse um die große Achse, so entsteht eine länglichte Sphäroide, oder Afterkugel; hingegen, um die kleine Achse, eine platte Sphäroide.

§. 139. **Anmerk.** Es giebt noch eine dritte Gattung von Elliptoiden, welche entstehen, wenn eine Ellipse durch einen schiefen Diameter in zween gleiche Theil getheilt, und wenn dann ein solches Stück um seine Achse bewegt wird. Dieser birnförmige Körper nun wird ein geometrisches Herz

genannt. d'Alemberts Berechnung dieses Körpers verräth einen sehr tiefen Blick in die inneren Geheimnisse der Mathematik. Sie kann im deutschen Realwörterbuch unter dessen Artikel nachgeschlagen werden.

§. 140. Aufgabe. Eine länglichte Sphäroide kubieren.

Auflösung. Das Element jedes runden Körpers ist nach §. 82 Diff. $\pi y^2 dx$. Man bestimme es daher in einer der sechs Gleichungen, z. B. in

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

$$\times \pi dx \quad \pi y^2 dx = \frac{\pi c^2 x dx}{a} - \frac{\pi c^2 x^2 dx}{a^2}$$

$$S(\pi y^2 dx) = \frac{\pi c^2 x^2}{2a} - \frac{\pi c^2 x^3}{3a^2}$$

Wenn nun $x = \frac{1}{2} a$ wird

$$S = \frac{\pi c^2 a^2}{8a} - \frac{\pi c^2 a^3}{24 a^2}$$

$$= \frac{\pi c^2 a}{8} - \frac{\pi c^2 a}{24}$$

Die Nenner gleich gemacht

$$S = \frac{3\pi a c^2 - \pi a c^2}{24} = \frac{2\pi a c^2}{24} = \frac{\pi a c^2}{12}$$

Weil aber dieß nur die halbe Elliptoide seyn kann, so ist

$$S = \frac{a c^2 \pi}{6}$$

§. 141. **Zusatz.** Nimmt man mehrmals an daß $a = c = d$ sey, so verwandelt sich unser Ausdruck $\frac{a c^2 \pi}{6}$ in die Kugelformel $\frac{d^3 \pi}{6}$ Geom. §. 240.

§. 142. Zusatz. Es wird unschwer einzusehen seyn, daß man sich bey der Kubatur der platten Elliptoide einer Gleichung bedienen müsse, wo die Ordinaten auf der kleinen Achse gezogen sind.

§. 143. **Anmerk.** Nehmen wir zur Anwendung folgende Aufgabe für uns. In Ermangluna einer richtigen Feinwage, soll der Werth einer aus Silber verfertigten Zitrone durch die Geometrie berechnet werden. Sie hält $2\frac{3}{4}$ Zoll in der Länge und 2 Zoll in der Dicke rheinländischen Maases.

Auflösung. Da die Figur einer Zitrone den Elliptoiden sehr nahe, wo nicht ganz damit übereins kömmt, so muß sie auch nach der Elliptoidenformel berechnet werden. Folglich

$$\frac{2\frac{3}{4} \times 2^2 \times 3{,}14}{6} = \frac{\frac{11}{4} \times 4 \times 3{,}14}{6} = \frac{11 \times 3{,}14}{6} = \frac{34{,}54}{6}$$

$= 5{,}756$ Kubikzoll. Da nun nach Prof. Karsten in seinem Auszuge, Statik §. 14 ein rheinländischer Kubikzoll Silber 3283 Grain (kölnisches Gewicht) wiegt, und die Mark Silber ungefähr auf 20 fl. angesetzt werden darf, so gilt die Proportion

1 Mark : 20 fl = 3283 Grain : x fl

oder 5760 G. : 20 = 3283 : x

$$5760x = 65660$$

$$x = \frac{65660}{5760} = 11 \text{ fl } 23\frac{2}{2}\frac{3}{4} \text{ kr.}$$

für 1 Kubikzoll 5760

§. 144. **Anmerk.** Die Berechnung der Sphäroiden hat vorzüglich ihren Nutzen in der Baukunst, wenn man die Masse oder den Druck elliptischer Rundgewölber zu berechnen wünscht.

§. 145. **Aufgabe. Die Oberfläche der Elliptoide zu bestimmen.**

Auf-

Auflösung. Das Oberflächenelement ist, wie wir es schon bey der Parabel genutzt haben, $2\pi y \sqrt{dv^2 + dy^2}$, wo $2\pi y$ die Peripherie jedes runden Körpers und $\sqrt{dv^2 + dy^2}$ den unendlich kleinen Abstand von einem Kreise eines solchen Körpers bis zum andern ausdrückt. Folglich wollen wir einen Werth dafür in der differentierten Gleichung finden, z. B. wieder in

$$2y\,dy = \frac{-2c^2 v\,dv}{a^2}$$

$$4y^2 dy^2 = \frac{4c^4 v^2 dv^2}{a^4}$$

$$+4y^2 dv^2 = +4\left(\tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}\right) dv^2$$

$$4y^2 dy^2 + 4y^2 dv^2 = \frac{4c^4 v^2 dv^2}{a^4} + 4\left(\tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}\right) dv^2$$

$$4y^2 (dy^2 + dv^2) = 4c^2 dv^2 \left(\frac{c^2 v^2}{a^4} + \tfrac{1}{4} - \frac{v^2}{a^2}\right)$$

$$= \frac{4c^2 dv^2}{a^4} (c^2 v^2 + \tfrac{1}{4}a^4 - a^2 v^2)$$

$$2y\sqrt{dy^2+dv^2} = \frac{2cdv}{a^2}\sqrt{(c^2v^2+\tfrac{1}{4}a^4-a^2v^2)}$$

$\times\pi$ $$2\pi y\sqrt{dy^2+dv^2} = \frac{2\pi cdv}{a^2}\sqrt{c^2v^2+\tfrac{1}{4}a^4-a^2v^2}$$

oder $$2\pi y\sqrt{dy^2+dv^2} = \frac{\pi cdv}{a^2}\sqrt{4c^2v^2+a^4-4a^2v^2}$$

$$= \frac{\pi cdv}{a^2}\sqrt{a^4-4(a^2-c^2)v^2}$$

Und wenn $4(a^2-c^2)$ wieder m gelten soll

$$2\pi y\sqrt{dy^2-dv^2} = \frac{\pi cdv}{a^2}\sqrt{a^4-mv^2}$$

Es ist aber $$\sqrt{a^4-mv^2} = a^2-\frac{mv^2}{2a^2}-\frac{m^2v^4}{8a^6}-\frac{m^3v^6}{16a^{10}}$$ §. 126

Hofr.

133

Folglich $2\pi y\sqrt{dy^2+dv^2} = \frac{\pi c\,dv}{a^2}\left(a^2\,dv - \frac{m v^2\,dv}{2a^2} - \frac{m^2 v^4\,dv}{8a^6} - \frac{m^3 v^6\,dv}{16 a^{10}}\ldots\right)$

$S(2\pi y\sqrt{dy^2+dv^2}) = \frac{\pi c}{a^2}\left(a^2 v - \frac{m v^3}{6a^2} - \frac{m^2 v^5}{40 a^6} - \frac{m^3 v^7}{112 a^{10}}\ldots\right)$

Wird $v = \frac{1}{2}a$, so ist endlich $= \pi\left(cv - \frac{mcv^3}{6a^4} - \frac{m^2 c v^5}{40 a^8} - \frac{m^3 c v^7}{112 a^{12}}\ldots\right)$

$S(2\pi y$ &c. $= \pi\left(\frac{ca}{2} - \frac{mc}{48a} - \frac{m^2 c}{1280 a^3} - \ldots\right)$

Und zuletzt noch für m subſtit. $= \pi\left(\frac{ca}{2} - \frac{4(a^2-c^2)c}{48a} - \frac{16(a^2-c^2)^2 c}{1280 a}\ldots\right)$

abgek. $= \pi\left(\frac{ca}{2} - \frac{(a^2-c^2)c}{12a} - \frac{(a^2-c^2)^2 c}{80 a^3}\ldots\right)$

Folglich die ganze Oberfläche $= \pi\left(ca - \frac{(a^2-c^2)c}{6a} - \frac{(a^2-c^2)^2 c}{40 a^3}\ldots\right)$

§. 146.

§. 146. **Zusatz.** Auch hier kömmt die Oberfläche der Kugel zum Vorschein, wenn $c = a = d$ angenommen wird, indem alle Glieder der unendlichen Reihe, das erste ausgenommen, zu Null werden, und nur noch $d^2 \pi$ übrig bleibt.

§. 147. **Anmerk.** Ein kleines Beyspiel dörfte auch dießmal nicht schaden. Ein Physiker möchte sich gerne einen Luftballon anschaffen, um damit Versuche zu machen. Wie viel wird er Taffent dazu vonnöthen haben, wenn derselbe 3 Ellen hoch und 2 Ellen dick werden soll?

Auflösung. Da ein solcher Ballon eine Ellipsoide giebt, so muß der Taffent von aussen die Oberfläche derselben vorstellen. Folglich gilt die Reihe

$$= 3{,}14\left(3\times 2 - \frac{(9-4)\times 2}{18} - \frac{(9-4)^2\times 2}{40\times 27}\ldots\right)$$

$$= 3{,}14\left(6 - \frac{10}{18} - \frac{50}{1080}\ldots\right)$$

$$= 3{,}14\left(6 - \frac{5}{9} - \frac{5}{108}\ldots\right) = 3{,}14\left(6 - \frac{60+5}{108}\ldots\right)$$

$$= 3{,}14\left(6 - \frac{65}{108}\right) = 3{,}14\times 5\,\frac{43}{108} = \frac{3{,}14\times 583}{108}$$

$$= \frac{1830{,}62}{108} = 16{,}9$$ d. i. beynahe 17 Ellen, weun der Taffent ellenbreit ist.

§. 148. **Anmerk.** Endlich käme die Reihe auch an die Verfahrungsart, wie man unendlicherley Ellipsen auf einmal rektificieren, quadrieren u. s. f., ingleichen auch, wie man ihre Tangenten und Normalen allgemein bestimmen müsse; weil aber dieser Artikel von keinem sonderlichen Belange ist, und zudem der Kalkul hierüber sehr weitläuftig und mühsam läßt, so wollen wir sie übergehen, und statt dessen hier am Ende der abgehandelten Ellipse nur noch anmerken, daß diese krumme Linie und ihre vorgetragene Lehrsätze in der Astronomie eine ungemein ausgebreitete Anwendung finden; weil die Laufbahnen der Erde und der übrigen Planeten lauter Ellipsen, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet, vorstellen, folglich auch nach ihren Gesetzen berechnet werden müssen.

Von

Von der Hyperbel.

§. 149. **Erkl.** Wenn man sich vorstellt, daß auf der Spitze jenes Kegels, woraus eine Hyperbel geschnitten worden, ein anderer gleich großer Kegel gerade umgekehrt stehe, so wird die rückwärts verlängerte Abscissenlinie der Hyperbel auch diesen Kegel schneiden und zur neuen entgegengesetzten Abscissenlinie werden. Die Entfernung nun von einem Schnitte zum andern wird die Achse der Hyperbel, und der aus dem Vereinigungspunkt der Kegelspitzen darauf hingefällte Perpendikel, die Queracchse, Nebenachse (wir wollen sie mehrmal durch c bezeichnen) genennt. Die Vertikalschenkel jener Dreyecke, welche durch der Kegel Mitte gehen heissen die Assymtoten der Hyperbel. Ein solches Dreyeck kömmt in mathematischen Schriften oft unter dem Name des Achsentriangels vor. Fig. 36 ist demnach a g die Achse

d c = a k wegen Parallelismus die halbe Querachse, und weil wegen dem gleichschenklichten Dreyecke a k = q k, so ist auch

a q die ganze Querachse. Und endlich

d s sammt d l die Assymtoten.

§. 150. **Zusatz.** Da der Achsentriangel in der ganzen Runde des Kegels herum sich selbst gleich bleibt, so kann derselbe auch parallel mit der Hyperbelfläche gedacht werden, welches man auch eigentlich für die gehörige Lage zu einander annimmt. In dieser Lage nun stehen die Aeste der Hyperbel auf den Endpunkten einer Sehne von des Kegels Grundfläche und die Assymtoten auf den Endpunkten des Diameters. Weil aber bey jeder Verlängerung des Kegels, und zwar bis ins Unendliche

dieß

dieß wahr bleibt, so folgt itzt schon klar daraus, daß die Hyperbeläste von den Assymtoten immer an Divergenz übertroffen werden. Tiefer unten wird dieser Satz auch aus der Natur der Hyperbelgleichung erwiesen werden. Indeß ist die Sache aus der Natur des Schnittes sattsam dargethan, wie aus Fig. 37 erhellet, daß b d immer kleiner seyn müsse als f g.

§. 151. **Anmerk.** Indeß ist dieß nur von solchen Hyperbeln wahr, die mit der Achse des Kegels parallel laufen. Andere Schnitte, die schief durch den Kegel gehen, und sich gegen die Achse neigen, ohne daß sie sich auf der andern Seite des Kegels enden könnten, wenn man ihn auch unendlich verlängern würde, nennt C. L. Schübler zwar auch Hyperbeln, und zwar so lange, bis der Schnitt parallel mit einer Seite des Kegels fortläuft, in welchen Fall, wie bekannt, sich eine Parabel bildet. Allein es ist unumgänglich nothwendig, daß diese angebliche Art von Hyperbeln einmal ihre Assymtoten, oder den Achsentriangel erreichen, weil sie früh oder spät die Kegelachse schneiden müssen; ausser sie würden sich von dieser Achse immer mehr und mehr entfernen, welcher Fall freylich eben sowohl als der erste möglich ist.

§. 152. **Zusatz.** Bey der Ellipse dorfte die Abscisse vorwärts verlängert werden, um die Achse abzugeben; hier bey der Hyperbel muß es rückwärts geschehen: folglich hat sie eine entgegengesetzte Lage und kann mit Recht, weil die Ellipsenachse positiv gesetzt wurde, negativ heißen.

§. 153. **Lehrsatz.** In jedem Punkte der Hyperbel ist das Quadrat der Ordinate gleich dem Produkte aus drey Faktorn, deren einer der Parameter, der andere die Abscisse, und der dritte die Summe der Abscisse und der Achse ist, alles durch die Achse dividiert.

Satz.

$$y^2 = \frac{p\,x\,(a+x)}{a}$$

Beweis.

Beweis.

Man schneide mehrmal den Kegel in jener Gegend, wo die krume Linie befindlich ist, parallel mit der Achse durch, so wird irgendwo eine gemeinschaftliche Ordinate dieses entstandnen Zirkels und der Hyperbel auf einem gemeinschaftlichen Punkte der zwo Kurvenachsen perpendikulär stehen. Es ist daher Fig. 36

$$p\,m^2 = h\,p \times p\,f.$$

oder

$$y^2 = h\,p \times p\,f.$$

Nun müssen für h p und p f Werthe gefunden werden.

Weil aber $\triangle$ g q a $\backsim$ $\triangle$ a p h; indem der Winkel p a h = o = x wegen Parallelismus, und zween Winkel rechte sind, so gilt die Proportion

$$g\,a : q\,a = a\,p : p\,h$$

subst.

$$a : c = x : p\,h$$

Folgl.

$$p\,h := \frac{c\,x}{a}$$

Ferner $\triangle$ g a q $\backsim$ $\triangle$ g f p aus obigen Gründen

also

$$g\,a : a\,q = g\,p : p\,f$$

wieder subst.

$$a : c = a+x : p\,f$$

und

$$p\,f = \frac{c\,(a+x)}{a}.$$

Diese Werthe in der ersten Gleichung des Beweises mit h p und p f vertauscht giebt

$$y^2 = \frac{c\,x}{a} \times \frac{c\,(a+x)}{a}$$

oder

$$y^2 = \frac{c^2}{a} \times \frac{x\,(a+x)}{a}.$$

Da aber $\frac{c^2}{a}$ schon in der Ellipse die Stelle des Parameters vertratt, so kann es auch hier geschehen, und ebenfalls durch p ausgedrückt werden. Folglich ist

$$y^2 = \frac{p\,x\,(a+x)}{a}$$

§. 154. **Zusatz.** Es stimmt sohin die Gleichung der Hyperbel völlig mit der der Ellipse überein, wenn man ausnimmt, daß sich das Minuszeichen in Plus verwandelt habe. Ueberhaupt liegt der ganze Unterschied der beyden Linien darinn, daß die große Achse in der Hyperbel negativ, in der Ellipse hingegen positiv sey; denn setzt man in der Hyperbelgleichung $y^2 = \frac{px(a+x)}{a}$ statt $+a$ überall $-a$ hinein, so giebt dieß

$$y^2 = \frac{px(-a+x)}{-a} = \frac{-apx}{-a} + \frac{px^2}{-a}$$

$$= px - \frac{px^2}{a}, \text{ wie bey der Ellipse §. 64.}$$

§. 155. **Zusatz.** Das nämliche beweiset sich auch wenn der Parameter in Achsenwerthen ausgedrückt in der Gleichung stehen bleibt. Es ist, weil

$$y^2 = \frac{c^2}{a} \times \frac{x(a+x)}{a} \text{ §. 153 am Ende,}$$

folglich $y^2 = \frac{ac^2x}{a^2} + \frac{c^2x^2}{a^2}$

oder $y^2 = \frac{c^2x}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}$, wo sich mehrmal statt $-$ das Pluszeichen einfindet. Setzt man nun wiederum gleich anfangs im zweyten Gliede überall $-a$, welches aber beym Parameterausdrucke $\frac{c^2}{a}$ nicht geschehen darf, weil der Parameter immer einen positiven Werth beybehalten muß, so kömmt

$$y^2 = \frac{c^2}{a} \times \frac{x(-a+x)}{-a}$$

$$= \frac{c^2x}{a} + \frac{c^2x^2}{-a^2} = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a^2} \text{ zum Vorschein.}$$

§. 156.

§. 156. Zus. Die Urgleichung $y^2 = \frac{px(a+x)}{a}$ kann auch sehr füglich in diese aufgelöset werden

$$y^2 = px + \frac{px^2}{a}$$

woraus dann der Grund fließt, warum die Kurve derselben Hyperbel genennt wird; weil nämlich das Quadrat der Ordinate um den Ueberschuß $\frac{px^2}{a}$ größer ist, als das Produkt aus dem Parameter in die Abscisse.

§. 157. Zusatz. Auch hier ist es klar, daß es zu beyden Seiten der Abscissenlinie Ordinaten gebe, indem wieder

$$y = \pm\sqrt{\frac{px(a+x)}{a}}$$

oder

$$= \pm\sqrt{\frac{c^2x}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}}$$

seyn muß.

§. 158. Zusatz. Es verhalten sich demnach in jedem Punkte der Hyperbel die Quadrate der Ordinaten wie die Produkte aus den Abscissen in die Summe der Achse und Abscisse zusammgenommen. Denn man darf nur, wie in der Ellipse §. 66 zwo Gleichungen in eine Proportion auflösen, so erhält man

$$y^2 : Y^2 = \frac{px(a+x)}{a} : \frac{pX(a+X)}{a}$$

$$y^2 : Y^2 = px(a+x) : pX(a+X)$$

$$y^2 : Y^2 = x(a+x) : X(a+X)$$

§. 159. Lehrsatz. Die Achse wird sowohl am Anfange als am Ende von der Hyperbel geschnitten.

Beweis.

Beweis.

Man lasse einmal $x = o$ und im zweyten Falle $x = -a$ werden, so verwandelt sich in jedem Falle die Ordinate in Null; denn

$$\text{I} \quad y^2 = \frac{p\,o \times (a+o)}{a} = o$$

also auch $y = o$

$$\text{II} \quad y^2 = \frac{p \times -a(a-a)}{a} = \frac{-p\,a \times o}{a} = o$$

folglich auch $y = o$

§. 160. **Lehrsatz.** Auf der negativen Achse ist keine Ordinate möglich, wohl aber jenseits derselben.

Beweis.

Wäre auf der negativen Achse eine Ordinate möglich, so müßte ihr auch ein Theil derselben als Abscisse entsprechen, z. B. $-\frac{a}{m}$, wo m jede ganze oder auch gemischte Zahl vorstellen soll; aber in diesem Fall ändert sich die Gleichung in

$$y^2 = p \times -\frac{a}{m}\left(a - \frac{a}{m}\right)$$

$$y^2 = \frac{-a^2 p}{a\,m} + \frac{a^2 p}{a\,m^2}$$

$$y^2 = \frac{a\,p}{m^2} - \frac{a\,p}{m}$$

Weil nun $m > 1$ so ist natürlich $\frac{a\,p}{m^2} < \frac{a\,p}{m}$.

Wenn

Wenn sie nun von einander abgezogen werden, bekömmt y^2 einen negativen Werth, folglich y gleich der Quadratwurzel aus einer negativen Größe, welche unmöglich, also auch die Ordinate unmöglich ist. Das erste, was zu erweisen war. Erstreckt sich die Abscisse in der entgegengesetzten Richtung weiter als über den Endpunkt der Achse, so ist sie auch größer als dieselbe. Sie kann wieder durch $-ma$ ausgedrückt werden. Also

$$y^2 = \frac{px - ma}{a} \cdot \frac{(a - ma)}{a}$$

$$y^2 = -\frac{a^2 mp + a^2 m^2 p}{a}$$

$$y^2 = am^2 p - amp$$

$y^2 = ap(m^2 - m)$ welches allemal eine positive Zahl giebt, folglich die Wurzel von y^2 und mit ihr die Ordinate möglich macht.

§. 161. **Lehrsatz.** Die Hyperbel ist keine in sich zurückkehrende Linie, wie die Ellipse.

Beweis.

Wenn die Hyperbel in sich zurückkehrte, so müßte es irgend eine größte Ordinate geben; allein diese findet nicht statt, wie aus folgendem Kalkul erhellet; also ist diese Kurve nicht zurückkehrend, sondern ihre Aeste entfernen sich immer mehr und mehr von einander, wie die der Parabel. Hier ist der Kalkul

$$y^2 = \frac{px(a+x)}{a} = \frac{apx+px^2}{a}$$

diff. $2ydy = \frac{apdx+2pxdx}{a}$

:ay

$$:ay \qquad dy = \frac{apdx + 2pxdx}{2ay}$$

$$:dx \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{ap + 2px}{a}$$

also hier $\quad o = \frac{ap + 2px}{a}$

$$\times a \qquad o = ap + 2px$$

$$-ap = 2px$$

$$:p \qquad -a = 2x$$

$$:2 \qquad -\tfrac{1}{2}a = x,$$

das heißt, nur dann hätte eine größte Ordinate statt, wenn die halbe negative Achse zur Abscisse werden könnte; da aber erwiesen worden, daß auf selber keine Ordinate möglich ist, so gehört eine größte Ordinate der Hyperbel unter die Undinge; folglich entfernen sich die Aeste dieser Kurve immer weiter und weiter voneinander, und zwar bis ins unendliche fort.

§. 162. **Lehrsatz.** Werden die Abscissen vom Mittelpunkte der Achse angerechnet, und ebenfalls durch v bezeichnet, so heißt die Gleichung

Satz

$$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}c^2$$

Beweis.

Es ist Fig. 36 $\quad ap = cp - ca$

oder $\quad x = v - \tfrac{1}{2}a$

Nun in der zwoten Urgleichung substituiert, giebt

$$y^2 = \frac{c^2(v - \frac{1}{2}a)}{a} + \frac{c^2(v - \frac{1}{2}a)^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{c^2 v}{a} - \frac{a c^2}{2a} + c^2 \frac{\left(v^2 - av + \frac{a^2}{4}\right)}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{c^2 v}{a} - \frac{c^2}{2} + \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{c^2 v}{a} + \frac{c^2}{4}$$

abgek. $$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$$

§. 163. Zusatz. Die Ellipsengleichungen, wo Mittelpunktsabscissen eingeschoben sind, ändern also das Minuszeichen nicht; aber die Glieder müssen versetzt werden, wenn sie den Hyperbelcharakter annehmen sollen.

§. 164. Zusatz. Wir sind nun im Stande gesetzt, alle obigen 6 Ellipsengleichungen für die Hyperbel anwendbar zu machen. Hier stehen sie der Ordnung nach.

1) $$y^2 = \frac{p x (a + x)}{a}$$

2) $$y^2 = p x + \frac{p^2 x^2}{c^2}$$

3) $$y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

4) $$y^2 = \frac{p v^2}{a} - \frac{1}{4} a p$$

5) $$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$$

6) $$y^2 = \frac{p^2 v^2}{c^2} - \frac{1}{4} c^2$$

§. 165. Zusatz. Denkt man sich die kleine Achse ebenfalls als Abscissenlinie zu beyden Seiten

fortgeführt, so würde sicher auch für die Mittelpunktsabscissen auf selber nach der Analogie die Gleichung gelten müssen $\Phi^2 = \frac{a^2 z^2}{c^2} - \frac{1}{4} a^2$

§. 166. **Lehrsatz.** Eben so wenig als auf der großen Achse Ordinaten möglich sind, sind sie es auch auf der Querachse. Sie kann aber wohl am Ende beyderseits geschnitten werden, und auf ihrer Verlängerung Ordinaten verstatten.

Beweis.

Da die Gleichung $\Phi^2 = \frac{a^2 z^2}{c^2} - \frac{1}{4} a^2$ vom Mittelpunkte die Abscissen anrechnet, so müßte, im Fall sich auf der Querachse Ordinaten befänden, die zugehörigen Abscissen kleiner als die Hälfte derselben seyn. Nehme man daher an z sey kleiner als $\frac{1}{2}$ c z. B. $z = \frac{c}{m}$ wo $m > 2$ ist, folglich $z^2 = \frac{a^2}{m^2}$ so verwandelt sich die Gleichung in folgende

$$\Phi^2 = \frac{a^2 c^2}{m^2 c^2} - \frac{1}{4} a^2$$

$$\Phi^2 = \frac{a^2}{m^2} - \frac{a^2}{4}$$

Man sieht beym ersten Anblick, daß unter dieser Bedingung nothwendig $\frac{a^2}{m^2} < \frac{a^2}{4}$ sey: daher wäre Φ^2 nach dem Abzuge einer negativen Größe gleich welches aber wieder eine baare mathematische Chimäre ist. Es ist also ausgemacht, daß die Ordinaten auf der Querachse keinen Platz haben. Nimmt

man eine Abscisse auf der andern Hälfte jenseits der großen Achse, so ist, weil hier $z = -\frac{a}{m}$ und

$$z^2 = \frac{a^2}{m^2}$$ wie vorher, dieß eben so richtig. Das erste was zu erweisen war.

Setzt man zweytens $z = \frac{c}{2}$ oder $-\frac{c}{2}$ folglich $z^2 = \frac{c^2}{4}$, so gewinnt die Gleichung folgendes Ansehen

$$\Phi^2 = \frac{a^2 c^2}{4 c^2} - \frac{a^2}{4}$$

$$\Phi^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 0$$

also $\Phi = 0$; das heißt in der Sprache der Algebra, die Ordinate ist an den äußern Endpunkten der Querachse so klein, daß sie sammt der krumen Linie in die Achse selbst fällt, oder was auf eins hinaus läuft, daß die Achse hier überall geschnitten wird, was zweytens zu erweisen war.

Drittens endlich soll z größer als $\frac{c}{2}$ oder $-\frac{c}{2}$ werden, z. B. $\frac{mc}{2}$ oder $-\frac{mc}{2}$, wo $m > 1$ so erscheint die verwandelte Aequation, weil $z^2 = \frac{m^2 c^2}{4}$

$$\Phi^2 = \frac{a^2 m^2 c^2}{4 c^2} - \frac{a^2}{4}$$

$$\Phi^2 = \frac{m^2 a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{(m^2 - 1) a^2}{4}$$

also $\Phi = \frac{a}{2}\sqrt{m^2 - 1}$. Da nun die Wurzel aus $m^2 - 1$ allemal eine positive Größe ist, so

hat

hat die Ordinate einen wahren Werth. Es giebt demnach zu beyden Seiten auf der verlängerten kleinen Achse ebenfalls Ordinaten, wie auf der verlängerten großen Achse.

§. 167. Zusatz. Es lassen sich demnach bey jeder Hyperbel nicht blos 4, sondern 8 unendliche Aeste gedenken; denn es kann auch auf der Verlängerung der Querachse nirgends ein Maximum geben, wie dieß sogleich aus der differentierten Gleichung ersichtlich ist

$$2\,\Phi\,d\,\Phi = \frac{2\,a^2\,z\,d\,z}{c^2}$$

$$:2 \qquad \Phi\,d\,\Phi = \frac{a^2\,z\,d\,z}{c^2}$$

$$:\Phi \qquad d\,\Phi = \frac{a^2\,z\,d\,z}{c^2\,\Phi}$$

$$:dz \qquad \frac{d\,\Phi}{d\,z} = \frac{a^2\,z}{c^2\,\Phi}$$

oder

$$o = \frac{a^2\,z}{c^2\,\Phi}$$

$$\times c^2\,\Phi \qquad o = a^2\,z$$

$$:a^2 \qquad o = z.$$

Weil nun z vom Mittelpunkte aus niemals zu Null werden kann, so ist auch hier keine größte Ordinate möglich. Alles bishergesagte erhellet auch schon aus Fig. 38.

§. 168. Anmerk. Wenn wir wieder auf die ersten zwo ursprünglichen Hyperbeläquationen zurückkehren, so erinnern wir uns, daß weder die ganze noch die halbe Hauptachse eine Abscisse werden, und eben so wenig die halbe Querachse eine Ordinate abgeben könne. Indeß wird es jedem begreiflich scheinen, daß Abscissen und Ordinaten auf der Verlängerung der Hauptachse möglich sind, die genau obige Größe haben. Wir wollen diese Behauptung in zween Lehrsätzen vortragen.

§. 169. Lehrsatz. Jener Abscisse, die so groß ist als die halbe Hauptachse, entspricht als Ordinate die halbe kleine Achse, multipliciert durch die Quadratwurzel aus 3.

Voraussetzung.

$$x = \tfrac{1}{2} a$$

Satz

$$y = \tfrac{1}{2} a \sqrt{3}$$

Beweis.

Es ist $$y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

subst. $$y^2 = \frac{c^2 a}{2a} + \frac{c^2 a^2}{4a^2}$$

abgek. $$y^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{4}$$

noch mehr $$y^2 = \frac{3 c^2}{4}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{2} c \sqrt{3}$$

§. 170. Zusatz. Ist $x = a$, so wird aus der Gleichung folgende

$$y^2 = \frac{c^2 a}{a} + \frac{c^2 a^2}{a^2}$$

$$y^2 = c^2 + c^2$$

$$y^2 = 2 c^2$$

$$y = c \sqrt{2}$$

§. 171. Lehrsatz. Einer Ordinate, die so groß als die halbe Querachse ist, korrespondiert eine Mittel=

Mittelpunktsabscisse, die der Hauptachse gleicht, wenn sie durch die Wurzel aus 2 dividiert wird.

Voraussetzung.

$$y = \frac{1}{2} c$$

Satz.

$$v = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Beweis.

Es ist hier $\frac{1}{4} c^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$

$: c^2$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{v^2}{a^2} - \frac{1}{4}$

versetzt $\quad \frac{1}{2} = \frac{v^2}{a^2}$

$\times a^2$ $\quad \frac{a^2}{2} = v^2$

$\sqrt{\quad}$ $\quad \frac{a}{\sqrt{2}} = v$

§. 172. Lehrsatz. Der Brennpunkt in jeder Hyperbel ist, vom Mittelpunkt ausgerechnet, wie in der Ellipse, nur daß das Zeichen geändert vorkömmt.

Satz.

$$v = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2}$$

Beweis.

Beweis.

$$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$$

aber hier ist $y = \frac{p}{2} = \frac{c^2}{2a}$ §. 73

quad. $$y^2 = \frac{c^4}{4a^2}$$

$$\frac{c^4}{4a^2} = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$$

$: c^2$ $$\frac{c^2}{4a^2} = \frac{v^2}{a^2} - \frac{1}{4}$$

$\times a^2$ $$\frac{c^2}{4} = v^2 - \frac{a^2}{4}$$

versetzt $$\frac{a^2 + c^2}{4} = v^2$$

$\sqrt{}$ $$\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2} = v$$

§. 173. Zusatz. Die übrigen gleichgültigen Ausdrücke für die Brennweite lassen sich eben so leicht nach den Regeln der Konversion bestimmen; wenn sie ehevor von der Ellipse entlehnt worden.

§. 174. Erkl. Jene Hyperbel, derer große und kleine Achse gleich sind, heißt eine gleichseitige Hyperbel.

§. 175. Zus. Die Gleichung $y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}$ verändert sich demnach für die gleichseitige Hyperbel in diese $y^2 = \frac{a^2 x}{a} + \frac{a^2 x^2}{a^2}$

$y^2 = ax + x^2$, welche mit verkehrtem Zeichen die des Zirkels ist. §. 176.

§. 176. **Zusatz.** Die Brennweite ist daher in der gleichseitigen Hyperbel $\frac{\sqrt{2}\,a^2}{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

§. 177. **Aufgabe.** In jeder Hyperbel die Brennweite und den Parameter durch Zeichnung sinnlich zu machen.

Auflösung. Man trage die halbe Querachse rechtwinklicht auf den Endpunkt der Hauptachse und ziehe die Hypothenuse. Mit dieser Hypothenuse nun beschreibe man aus dem Mittelpunkte der Hauptachse einen Bogen durch die Hyperbel, so wird er gerade die Abscissenlinie im Brennpunkte schneiden. Denn ich erweise daß Fig. 39

$$cF = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} \text{ sey.}$$

Beweis.

$$cg^2 = cb^2 + bg^2$$

Aber $cg = cF$, $cb = \frac{1}{2}a$ und $bg = \frac{1}{2}e$

folgl. $cF^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 = \frac{a^2 + c^2}{4}$

$$\sqrt{cF} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2}$$

Wird nun auf dem Brennpunkte eine Doppelordinate errichtet, so ist eben darum auch der Parameter der Hyperbel sichtbar.

§. 178. **Lehrsatz.** Die Differenz zweener Brennstrahlen, die in der Kurve einen Winkel machen, ist in jeder Hyperbel der Hauptachse gleich.

Satz. Fig. 40.

$$mf - mF = a$$

Beweis.

Wenn von jenem Punkt der Hyperbel, wo die beyden Brennstrahlen zusamm laufen, eine Ordinate ausgezogen wird, so ist

I $\quad fm^2 = fp^2 + pm^2$

aber $\quad fp = fa + ap$

oder $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} + v$

und $\quad fp^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + v\sqrt{a^2 + c^2 + v^2}$

so wie $\quad pm^2 = \frac{v^2\,c^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$

Nun subst. $\quad fm^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + v\sqrt{a^2+c^2} + v^2 + \frac{c^2\,v^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$

abgek. $\quad fm^2 = \frac{1}{4}a^2 + v\sqrt{a^2 + c^2} + v^2 + \frac{c^2\,v^2}{a^2}$

$\sqrt{}$ $\quad fm = \frac{1}{2}a + \frac{v}{a}\sqrt{a^2 + c^2}$

II Es ist auch eben so richtig, daß

$$Fm^2 = Fp^2 + pm^2$$

Allein $\quad Fp = ap - aF$

oder $= v - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2}$

Folgl. $\quad Fp^2 = v^2 - v\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2$

Subst. $\quad Fm^2 = v^2 - v\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{c^2\,v^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$

abgek.

abgek. $Fm^2 = v^2 + c^2 v^2 - \frac{v}{a^2}\sqrt{a^2 + c^2 + \frac{1}{4}a^2}$

$$Fm = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{v}{a}\sqrt{a^2 + c^2}$$

oder auch $Fm = \frac{v}{a}\sqrt{a^2 + c^2} - \frac{1}{2}a$ nach der Würdenlehre.

Nun ist nach Nro I $fm = \frac{1}{2}a + \frac{v}{a}\sqrt{a^2 + c^2}$

Hier nach Nro II $Fm = -\frac{1}{2}a + \frac{v}{a}\sqrt{a^2 + c}$

$$- \quad + \quad -$$

$$fm - Fm = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a = a$$

§. 179. **Aufgabe.** Eine Hyperbel zu zeichnen.

Auflösung und Beweis. Man ziehe eine unbestimmte gerade Linie, schneide die Hauptachse davon ab, und bestimme zwo gleiche Brennweiten. Man nehme nun immer eine beträchtlich größere Zirkelöfnung als die Hauptachse ist, und beschreibe aus einem der Brennpunkte einen Bogen, und durchschneide ihn mit einer andern Oefnung, welche ausdrückt, um wie viel die vorige größer als die Achse war, so wird der Durchschnittspunkt in der Hyperbel liegen; weil hier $fm - Fm = a$ seyn muß. Wiederholt man diese Methode mit andern Zirkelöfnungen dieser Art, so werden auch eben darum mehr Punkte von dieser Kurve bestimmt werden.

§. 180. **Aufgabe.** Die Tangente der Hyperbel zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe auf jenen Punkt, wodurch die Tangente gehen soll, zween Brennstrahlen zusamm, und theile den Winkel, welchen sie mit einander bilden, in zween gleiche Theile, so wird

die

die Theilungslinie die verlangte Tangente seyn. Denn es liegt weder oberhalb noch unterhalb ein Punkt dieser Tangente mehr in der Kurve.

Beweis.

Man mache Fig. 41 d m = F m
folglich ist f d = f m — F m = a b
Es ist ferner F g = g d
g c = g c
und o = x
also △ F g c ≅ △ g c d und eben darum
F c = d c
Nun ist f c < f d + d c
subst. f c < a b + F c
— F c — F c
f c — F c < a b; daher c kein Punkt der Hyperbel.

Eben so wenig n; denn es läßt sich auf die nämliche Art erweisen, daß F n = d n
Nun ist aber f n < f d + d n
subst. f n < a b + F n
— F n — F n
f n — F n < a b, was zu erhärten war.

§. 181. Zusatz. Verlängert man einen der Brennstrahlen, so werden die Winkel, welche sie auf der Tangente gestalten, vollkommen einander gleich seyn; der Beweis ist gerade wie bey der Ellipse.

§. 182. Anmerk. Die Akustik und vorzüglich die Katoptrik weiß von der Hyperbel wegen der Gleichheit der Brennstrahlwinkel ebenfalls wichtigen Gebrauch zu machen. Die Sache setzt zu viele Theorie dieser physischen Artikel voraus, als daß wir uns dießorts hierüber näher erklären könnten.

§. 183.

§. 183. **Lehrsatz.** Es läßt sich nach aller geometrischer Strenge erweisen, daß die Assymtoten, obwohl sie immer den Hyperbeläsien näher und näher kommen, doch mit selben nie zusamm fallen. Denn wenn man von ein und dem nämlichen Punkte der Abscissenlinie sowohl auf die Hyperbelschenkel als auf die daranliegende Assymtote Ordinaten zieht, so giebt die Differenz dieser quadrierten Ordinaten in jedem Falle eine beständige Größe, nämlich den 4ten Theil des Quadrats der Querachse.

Satz.

$z^2 - y^2 = \frac{1}{4} c^2$, wo z die Ordinate auf die Assymtote vorstellet.

Beweis. Fig. 42

$$ca : da = cp : rp$$

subst. $\quad \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}c = (x + \frac{1}{2}a) : z$

x 2 $\quad a : c = (x + \frac{1}{2}a) : z$

$$az = cx + \tfrac{1}{2}ac$$

quad. $\quad a^2 z^2 = c^2 x^2 + a c^2 x + \frac{1}{4} a^2 c^2$

: a^2 $\quad z^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2} + \frac{c^2 x}{a} + \frac{1}{4} c^2$

aber $\quad y^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2} + \frac{c^2 x}{a}$

— — —

$$z^2 - y^2 = \tfrac{1}{4} c^2$$

§. 184. **Zusatz.** Da dieß zu beyden Seiten der Hyperbel wahr ist, so folgt auch, daß die Differenzen dieser Ordinaten selbst beyderseits gleich sind; denn wenn

$z^2 - y^2 = \frac{1}{4}c^2$

so ist auch $Z^2 - Y^2 = \frac{1}{4}c^2$ von der andern Seite

also $z^2 - y^2 = Z^2 - Y^2$

aber $-y^2 = -Y^2$

$z^2 = Z^2$

$z = Z$

Da nun $y = Y$

$z - y = Z - Y$

§. 185. Zusatz. Weil ein solches Stück zwischen dem Hyperbelschenkel und der Assymtote durch $z - y$ und das übrige Stück der grossen Doppelordinate $2z$ durch $z + y$ ausgedrückt werden kann, so giebt auch das Produkt aus diesen zwoen Segmenten $z^2 - y^2$ mehrmals $\frac{1}{4}c^2$

§. 186. Erkl. Wenn mit den Assymtoten aus dem Scheitelpunkt der Hyperbel ein Parallelogram ergänzt wird, so heißt eine solche Seite die Potenz der Hyperbel.

§. 187. Lehrsatz. Die Potenz der Hyperbel ist gleich den 4ten Theil der Quadratwurzel aus der Summe der beyden quadrierten Achsen. Wenn daher b die Potenz ausdrückt, so heißt der

Satz.

$$b = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{4}$$

Beweis. Fig. 43.

$z = y$ wegen Parallelismus

$z = s$ wegen gleichschenklichten Δ

also $y = s$ und deßwegen gh

$$gh = dg = b$$

Ferner $r = m$

$o = m$

---

also $o = r$ und daher auch

$$fg = dg = b$$

Aber $fg + gh = fh$

subst. $b + b = \sqrt{a^2 + c^2}$

$$2b = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$\frac{}{2}$$

$$b = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2}$$

:2

4

§. 188. **Lehrsatz.** Wenn von einem Punkt der Kurve auf die Assymtote eine Parallellinie mit der Potenz der Hyperbel gezogen, und für eine Ordinate $= \mu$, so wie das vom Mittelpunkt aus abgeschnittne Stück der Assymtote selbst für ihre Abscisse $= \zeta$ angenommen wird, so heißt die Gleichung zwischen der Hyperbel und den Assymtoten $b^2 = \mu\zeta$

Beweis. Fig. 44

Man ziehe von jenem Endpunkt einer solchen Ordinate, der in der Kurve liegt, eine Linie mit der nächsten Assymtote parallel, bis hin zur andern Assymtote und nenne einstweilen das Stück $z - y = m$ so ist

I $qk : nq = cd : gd$

$m : \mu = \frac{1}{2}c : gd$

$m \times gd = \frac{c\mu}{2}$

gd

$$gd = \frac{c\,\mu}{2\,m}$$

aber $gd = b$

also $b = \frac{c\,\mu}{2\,m}$

und $b^2 = \frac{c^2\,\mu^2}{4\,m^2}$

Weil aber $(z-y)\,(z+y) = \frac{1}{4}c^2$ nach §. 185.

subſtit. $m \times qr = \frac{1}{4}c^2$

und $qr = \frac{c^2}{4\,m}$

ſo gilt in II $cd : gd = qr : qf$ oder nh

die Subſt. $\frac{c}{2} : \frac{c\,\mu}{2m} = \frac{c^2}{4m} : \zeta$

$$\frac{c^3\,\mu}{8\,m^2} = \frac{c\,\zeta}{2}$$

$:c$ $$\frac{c^2\,\mu}{8\,m^2} = \frac{\zeta}{2}$$

$\times 2$ $$\frac{c^2\,\mu}{4\,m^2} = \zeta$$

$\times \mu$ $$\frac{c^2\,\mu^2}{4\,m^2} = \mu\zeta$$

Allein es iſt $\frac{c^2\,\mu^2}{4\,m^2} = b^2$

Folglich $b^2 = \mu\zeta$

§. 189. **Aufgabe.** Eine gleichſeitige Hyperbel zu beſchreiben.

Auflöſung. Man ſetze zwo gerade Linien unter einen rechten Winkel zuſamm, beſtimme die Potenz, wenn ſie nicht etwa gegeben iſt, nach Will-

kühr

führ verlängere zwo Seiten parallel mit den Assymtoten, und beschreibe etliche Halbkreise auf eben diese Assymtoten, die sich alle im rechten Winkel anfangen. Da nun, wo die Parallelen vom Kreise geschnitten worden, fälle man Perpendikel auf den Diameter herab, setze den Handzirkel auf dem Endpunkt des Perpendikels ein, und durchschneide selben mit dem kleinern Segment des Diameters, so wird ein solcher Durchschnittspunkt in der gleichseitigen Hyperbel liegen.

Beweis.

$$fg^2 = af \times fl$$

Aber $fg = aq = b$

$af = \zeta$

und $fl = fm = \mu$

Subst. $b^2 = \zeta\mu$. Folglich, weil dieß auch bey kn, und andern Ordinaten statt hat, ist die Hyperbel zwischen den Assymtoten richtig beschrieben. Daß sie aber gleichseitig sey, rühret daher, weil der rechte Winkel a durch die Achse in zween gleiche Theil getheilt worden, wo demnach $o = x = 45°$ folglich das rechtwinklichte Dreyeck afb gleichschenklicht seyn muß, das heißt, nothwendig $bf = ab$ oder $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}a$ ist.

§. 190. **Aufgabe.** Die Tangente, Subtangente, Normal und Subnormal bey der Hyperbel zu bestimmen.

Auflösung. Es wäre überflüßig uns hier wiederum den mühsamen Rechnungen zu unterziehen. Sie sind die nämlichen, wie bey der Ellipse, wenn man ausnimmt, daß die Minuszeichen zuvor überall in Pluszeichen verwandelt werden müssen, im Fall die

Achsengleichung $y^2 = \frac{a\,c^2\,x + c^2\,x^2}{a^2}$ auch hier zum Grunde gelegt wird. Es ist diesem zufolge

1) $T. = \frac{\sqrt{(ax+x^2)(a^2c^2+4x(a^3+a^2x+ac^2+c^2x))}}{a\,(a+2x)}$

2) Subt. $= \frac{2\,x\,(a+x)}{a+2x}$

3) Norm. $= \frac{\sqrt{a^2c^2+4x(a^3c+c^2a^2x+ac^3+c^4x}}{2\,a^2}$

4) Subnorm. $= \frac{c^2\,(a+2x)}{2\,a^2}$

§. 191. **Zusatz.** Setzt man in diesen Formeln $c = a$, so erhält man selbe für die gleichseitige

1) Tang. $= \frac{\sqrt{(ax+x^2)(a^4+4x(a^3+a^2x+a^3+a^2x))}}{a\,(a+2x)}$

$= a\,\frac{\sqrt{(ax+x^2)\,(a^2+4x(a+x+a+x))}}{a\,(a+2x)}$

$= \frac{\sqrt{(ax+x^2)\,(a^2+4x(2a+2x)}}{a+2x}$

2) Norm. $= \frac{\sqrt{a^4+4x\,(a^4+a^4x+a^4+a^4x)}}{2\,a^2}$

$= 2\,a^2\,\frac{\sqrt{\frac{1}{4}+x\,(1+x+1+x)}}{2\,a^2}$

$= \sqrt{2\,x^2+2\,x+\frac{1}{4}}$

3) Subnorm. $= \frac{a^2\,(a+2x)}{2\,a^2}$

$= \frac{a+2x}{2}$

$= x + \frac{1}{2}a$

§. 192. Aufgabe. Eine Hyperbel rektificieren.

Auflösung. Nehmen wir die Gleichung der Mittelpunktsabscissen vor uns, so geht die Arbeit doch Anfangs einigermassen parallel mit der Rektifikation der Ellipse.

$$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2$$

diff. $$2 y dy = \frac{2 c^2 v dv}{a^2}$$

$$: 2 \qquad y dy = \frac{c^2 v dv}{a^2}$$

quad. $$y^2 dy^2 = \frac{c^4 v^2 dv^2}{a^4}$$

div. durch $$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2 = \frac{4 c^2 v^2 - a^2 c^2}{4 a^2}$$

$$dy^2 = \frac{c^4 v^2 dv^2}{a^4} \times \frac{4 a^2}{4 c^2 v^2 - a^2 c^2} = \frac{4 a^2 c^4 v^2 dv^2}{4 a^4 c^2 v^2 - a^6 c^2}$$

qua

191

den Bruch verkl. $dy^2 = \frac{4c^2v^2dv^2}{4a^2v^2 - a^4}$

$$\frac{+ dv^2 \qquad + dv^2}{dy^2 + dv^2 = \frac{4c^2v^2dv^2}{4a^2v^2 - a^4} + dv^2}$$

$$= \frac{4c^2v^2dv^2 + 4a^2v^2dv^2 - a^4dv^2}{4a^2v^2 - a^4}$$

$$= \frac{dv^2}{a^2}\left(\frac{4c^2v^2 + 4a^2v^2 - a^4}{4v^2 - a^2}\right)$$

$$\sqrt{(dy^2 + dv^2)} = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{4c^2v^2 + 4a^2v^2 - a^4}{4v^2 - a^2}} = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{4(a^2 + c^2)v^2 - a^4}{4v^2 - a^2}}$$

Setzt man hier mehrmals $4(a^2 + c^2) = m$, so entsteht

$$\sqrt{dy^2 + dv^2} = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{mv^2 - a^4}{4v^2 - a^2}} \text{ oder } = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{a^4 - mv^2}{a^2 - 4v^2}}$$

Wenn

Weil aber nach §. 126 $\sqrt{a^4 - m v^2} = a^2 - \frac{m v^2}{2 a^2} - \frac{m^2 v^4}{8 a^6} - \frac{m^3 v^6}{16 a^{10}} \ldots\ldots$

Und $\sqrt{a^2 - 4 v^2} = a - \frac{2 v^2}{a} - \frac{2 v^4}{a^3} - \frac{4 v^6}{a^5}$

so läßt sich noch vor der Division statt

$m = 4 a^2 + 4 c^2$

$m^2 = 16 a^4 + 32 a^2 c^2 + 16 c^4$

und $m^3 = 64 a^6 + 192 a^4 c^2 + 192 a^2 c^4 + 64 c^4$ im Zähler substituieren.

Man bekömmt nach der Abkürzung zum Dividend:

$$a^2 - 2 v^2 - \frac{2 c^2 v^2}{a^2} - \frac{2 v^2}{2 a^2} - \frac{4 c^2 v^4}{a^4} - \frac{2 c^4 v^4}{a^6} - \frac{4 v^6}{a^4} - \frac{12 c^2 v^6}{a^6} - \frac{12 c^4 v^6}{a^8} \ldots\ldots$$

Der Quotus hingegen selbst ist

$$a - \frac{2 c^2 v^2}{a^3} - \frac{8 c^2 v^4}{a^5} + \frac{2 c^4 v^4}{a^7} \ldots\ldots$$

Deßwegen $\sqrt{dv^2 + dy^2} = \frac{dv}{a}\left(a - \frac{2 c^2 v^2}{a^3} - \frac{8 c^2 v^4}{a^5} + \frac{2 c^4 v^4}{a^7} \ldots\ldots\right)$

$$= dv - \frac{2 c^2 v^2 dv}{a^4} - \frac{8 c^2 v^4 dv}{a^6} + \frac{2 c^4 v^4 dv}{a^8} \ldots\ldots$$

$$S\left(\sqrt{dv^2+dy^2}\right) = v - \frac{2c^2v^3}{3a^4} - \frac{8c^2v^5}{5a^6} + \frac{2c^4v^5}{5a^8}$$

$$\text{oder} = v - \frac{2c^2v^3}{3a^4} + \left(\frac{2c^4-8a^2c^2}{5a^8}\right)v^5 \ldots\ldots$$

§. 193. **Zusatz.** Ist die Hyperbel gleichseitig, das heißt, wird $c = a$, so giebt die Reihe $= v - \frac{2a^2v^3}{3a^4} + \frac{(2a^4-8a^4)v^5}{5a^8} \ldots$

$$\text{abgek.} = v - \frac{2v^3}{3a^2} - \frac{6v^5}{5a^4} \ldots$$

Woraus man offenbar sieht, daß diese Reihe bey großen Hyperbelbögen nicht gebraucht werden kann; denn weil in solchen Fällen $v > a$, so müssen die hintern Glieder immer größer und größer werden, und lassen sich am Ende gar nicht mehr vom ersten positiven Gliede abziehen. Es ist daher besser, wenn man die Fraktion $\frac{mv^2-a^4}{4v^2-a^2}$ ungeändert läßt, und so in dieser Gestalt aus Zähler und Nenner die Wurzel zieht.

Es ist aber $(mv^2 - a^4)^{\frac{1}{2}} = (mv^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(mv^2)^{-\frac{1}{2}} \times -a^4 + \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}}{1 \times 2}(mv^2)^{-\frac{3}{2}} \times +a^8 +$

$+ \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2}}{1 \times 2 \times 3}(mv^2)^{-\frac{5}{2}} \times -a^{12} \ldots$

Abgek. $= m^{\frac{1}{2}} v - \frac{a^4}{2m^{\frac{1}{2}}v} - \frac{a^8}{8m^{\frac{3}{2}}v^3} - \frac{a^{12}}{16m^{\frac{5}{2}}v^5} \ldots$

Ferner ist $(4v^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} = (4v^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(4v^2)^{-\frac{1}{2}} \times -a^2 + \frac{\frac{1}{2} + -\frac{1}{2}}{1 \times 2}(4v^2)^{-\frac{3}{2}} \times +a^4 +$

$+ \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2}}{1 \times 2 \times 3}(4v^2)^{-\frac{5}{2}} \times -a^6 \ldots$

Abgek. $2v - \frac{a^2}{2 \times 4^{\frac{1}{2}} v} - \frac{a^4}{8 \times 4^{\frac{3}{2}} v^3} - \frac{a^6}{16 \times 4^{\frac{5}{2}} v^5} \ldots$

Noch mehr, giebt $2v - \frac{a^2}{4v} - \frac{a^4}{64v^3} - \frac{a^6}{512v^5} \ldots$

Der Quotus davon ist: $\frac{m^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{m^{\frac{1}{2}}a^2}{16v^2} + \frac{3m^{\frac{1}{2}}a^4}{256v^4} + \frac{5m^{\frac{1}{2}}a^6}{2048v^6} \ldots$

$$- \frac{a^4}{4m^{\frac{1}{2}}v^2} - \frac{a^6}{32m^{\frac{1}{2}}v^4} \ldots$$

Diese Reihe durch $\frac{dv}{a}$ multipliciert, so erscheint die obige Gleichung wieder in andern Ausdrücken

$$\sqrt{dv^2 + dy^2} = \frac{m^{\frac{1}{2}}dv}{2a} + \frac{m^{\frac{1}{2}}a^2dv}{16av^2} - \frac{a^4dv}{4m^{\frac{1}{2}}av^2} + \frac{3m^{\frac{1}{2}}a^4dv}{256av^4} - \frac{a^6dv}{32m^{\frac{1}{2}}av^4}$$

$$+ \frac{5m^{\frac{1}{2}}a^6dv}{2048m^{\frac{1}{2}}av^6} \ldots$$

abgekürzt, und anderst ausgedrückt, giebt

Folgl. $\frac{m^{\frac{1}{2}}dv}{2a} + \frac{m^{\frac{1}{2}}av^{-2}dv}{16} - \frac{a^3v^{-2}dv}{4m^{\frac{1}{2}}} + \frac{3m^{\frac{1}{2}}a^3v^{-4}dv}{256} - \frac{a^5v^{-4}dv}{32m^{\frac{1}{2}}} + \frac{5m^{\frac{1}{2}}a^5v^{-6}dv}{2048} \ldots$

Folgl. $S(\sqrt{dy^2+dv^2}) = \frac{m^{\frac{1}{2}}v}{2a} + \frac{m^{\frac{1}{2}}av^{-1}}{-16} - \frac{a^3v^{-1}}{-4m^{\frac{1}{2}}} + \frac{3m^{\frac{1}{2}}a^3v^{-3}}{-3\times256}$

$$- \frac{a^5v^{-3}}{-3\times32m^{\frac{1}{2}}} + \frac{5m^{\frac{1}{2}}a^5v^{-5}}{-5\times2048} \ldots.$$

Abgek. $= \frac{m^{\frac{1}{2}}v}{2a} - \frac{m^{\frac{1}{2}}a}{16v} + \frac{a^3}{4m^{\frac{1}{2}}v} - \frac{m^{\frac{1}{2}}a^3}{256v^3} + \frac{a^5}{96m^{\frac{1}{2}}v^3} - \frac{m^{\frac{1}{2}}a^5}{2048v^5} \ldots.$

Weil nun $m = 4(a^2+c^2)$, und $m^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{a^2+c^2}$ ist, so kann überall in der Reihe substituiert werden; und ein rektificierter Hyperbelast wird demnach seyn:

$$\frac{v\sqrt{a^2+c^2}}{a} - \frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{8v} + \frac{a^3}{8v\sqrt{a^2+c^2}} - \frac{a^3\sqrt{a^2+c^2}}{128v^3} + \frac{a^5}{192v^3\sqrt{a^2+c}}$$

$$- \frac{a^5\sqrt{a^2+c^2}}{1024v^5} \ldots.$$

§. 194. Zusatz. Dieser Formel zufolge, wäre der Ausdruck für die gleichseitige Hyperbel, weil $\sqrt{a^2+c^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$, folgender:

$$\frac{av\sqrt{2}}{a} - \frac{a^2\sqrt{2}}{8v} + \frac{a^3}{8av\sqrt{2}} - \frac{a^4\sqrt{2}}{128v^3} + \frac{a^5}{192av^3\sqrt{2}} - \frac{a^6\sqrt{2}}{1024v^5} \cdots$$

und abgek. $= v\sqrt{2} - \frac{a^2\sqrt{2}}{8v} + \frac{a^2}{8v\sqrt{2}} - \frac{a^4\sqrt{2}}{128v^3} + \frac{a^4}{192v^3\sqrt{2}} - \frac{a^6\sqrt{2}}{1024v^5} \cdots$

oder auch $v\sqrt{2} + \left(\frac{a^2}{8v} + \frac{a^4}{192v^3} \cdots\right) : \sqrt{2} - \left(\frac{a^2}{8v} + \frac{a^4}{128v^3} \cdots\right) \times \sqrt{2}$.

§. 195. **Anmerk.** Ein Exempel hierüber zur Versinnlichung. Vor einem Sommerpallaste soll zu beyden Seiten eine Baumallee in Form einer gleichseitigen Hyperbel angelegt werden, dessen Hauptachse 120′ beträgt; wie viel hat man Bäume nöthig, wenn sie in der äußern Reihe 12 Schuh von einander entfernt werden. und ihre senkrechte Länge d. i. die Abscisse 80 Fuß gerechnet werden darf?

Auflösung. Da bey jeder Allee die Seitenreihen gleich viele Bäume haben, so suche man den äußersten Hyperbelschenkel in Schuhen, dividiere ihn durch 12 und nehme den Quotus viermal; oder was eines ist, man dividiere den gefundnen Schenkel durch drey, so erhält man die verlangte Anzahl von Bäumen.

Aufl.

Es ist hier $v = \frac{120}{2} + 80 = 60 + 80 = 140$

Folglich die Reihe

$$= 140\sqrt{2} + \left(\frac{120^2}{8 \times 140} + \frac{120^4}{192 \times 140^3}\right) : \sqrt{2} - \left(\frac{120^2}{8 \times 140} + \frac{120^4}{128 \times 140^3}\right) \times \sqrt{2}$$

$$= 140 \times 1{,}414 + \left(\frac{14400}{1120} + \frac{207360000}{526848000}\right) : \sqrt{2}\left(\frac{14400}{11200} + \text{u. s. f.}\right.$$

= 198 Schuhe ungefähr, weil die zwo letzten eingeklammerten Glieder fast kaum jede eine Einheit beträgt, und daher angesehen werden dörfen, als wenn sie sich völlig einander aufheben. Nun giebt 198 : 3 = 66 Bäume für die ganze Allee.

§. 196. **Anmerk.** Die Quadratur der Hyperbel, so wie die Bestimmung der Oberfläche eines hyperbolischen Afterkegels muß hier wegen den logarithmischen Differentialien, die sich mit in die Reihen mengen, bis auf tiefer unten verschoben werden, wo ohnehin die Logistik, von der wir oben in der Parabel §. 40 Meldung thaten, in Kürze abgehandelt werden soll. Wir wollen demnach den Artikel von der Hyperbel mit der Kubatur des dahin gehörigen Kegels einsweilen schließen.

§. 197. **Aufgabe.** Jene Körper, die durch Umwälzung einer Hyperbel erzeugt werden, zu kubieren.

Auflösung. Wie wir bey der Elliptoide uns der Aequation $y^2 = c^2 x - \frac{c^2 x^2}{a^2}$ bedienten, so nehmen wir auch hier wieder ihre gleichförmige vor uns.

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

$$\times \pi dx \quad \pi y^2 dx = \pi \left(\frac{c^2 x dx}{a} + \frac{c^2 x^2 dx}{a^2} \right)$$

$$S(\pi y^2 dx = \pi \left(\frac{c^2 x^2}{2a} + \frac{c^2 x^3}{3a^2} \right)$$

$$\text{oder} = \pi \left(\frac{3ac^2 x^2 + 2c^2 x^3}{6a^2} \right) = \frac{\pi c^2 x^2}{6a^2} (3a + 2x)$$

§. 198. **Zusatz.** Sähe man etwa gerne, daß sich statt der kleinen Achse lieber die Ordinate in der Formel befände, so suche man einen Werth für c^2 aus der Gleichung folgender Gestalt

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2} = \frac{ac^2 x + c^2 x^2}{a^2}$$

$$\times a^2 \quad a^2 y^2 = ac^2 x + c^2 x^2 = c^2 (ax + x^2)$$

$$\frac{a^2 y^2}{ax + x^2} = c^2$$

Diesen Ausdruck nun statt c^2 substituiert, giebt

$$\text{Solid.} = \frac{\pi a^2 y^2 x^2}{6a^2 (ax + x^2)} (3a + 2x)$$

$$= \frac{\pi y^2 x^2}{6(ax + x^2)} (3a + 2x) = \frac{\pi y^2 x (3a + 2x)}{6 (a + x)}$$

§. 199. **Zusatz.** Ist die Rede von einer gleichseitigen Hyperbel, so verwandelt sich der erste Ausdruck in $\frac{\pi x^2}{6} (3a + 2x)$ und der andere, oder

$$\frac{\pi y^2 x^2}{6 (ax + x^2)} \times (3a + 2x), \text{ weil } y^2 = ax + x^2,$$

$$\text{in diesen } \frac{\pi x (ax + x^2)}{6 (a + x)} (3a + 2x) = \frac{\pi x^2 (3a + 2x)}{6}$$

§. 200. **Anmerk.** Da fast jede Speiseschüssel eine Hyperboloide vorstellt, so kann auch der Inhalt einer darinn befindlichen Masse so ziemlich berechnet werden. Es geschah einst auf einem meteorologischen Observatorium, daß man, weil das eigentliche Behältniß zu Grunde gegangen war, ein schüsselförmiges Gefäß dem Regen aussetzen mußte. Beym Ende desselben fand sich, daß das Wasser in selbem 6 Zoll hoch stand. Wenn nun dieß eine gleichseitige Hyperboloide ist, deren Achse 10 Zoll hat, und die oberste Randesweite 20 Zoll beträgt, wie hoch darf dießmal das Regenwasser in die Ephemeriden eingetragen werden?

Auflösung. Man finde zuerst den kubischen Inhalt, und verwandle ihn in einen Zylinder, dessen Basis 20 Zoll zum Diameter hat, so ist eben darum die Höhe des Wassers auf jenem Platze gefunden, auf welchen es eigentlich geregnet hatte.

Also $\frac{3{,}14 \times 6^2 (3 \times 20 + 2 \times 6)}{6} = 3{,}14 \times 6 (60 + 12)$

$= 3{,}14 \times 6 \times 72 = 1356{,}48$ Zoll.

Weil nun die Randesfläche $\frac{20^2 \times 314}{4}$ ist, so gilt die Gleichung für den Wasserzylinder, dessen Höhe unbekannt ist

$$\frac{20^2 \times 3{,}14\, x}{4} = 1356{,}48$$

$$100 \times 3{,}14\, x = 1356{,}48$$

$$3{,}14\, x = 1356{,}48$$

$$x = \frac{1356{,}48}{314} = 4{,}32 \text{ Zoll Höhe.}$$

Von der Logistik, oder der logarithmischen Linie.

§. 201. **Erkl.** Wenn eine gerade Linie von unbestimmter Länge irgendwo gezogen und in gleiche Theile

Theile eingetheilet wird; wenn ferner auf den Abtheilungspunkten Perpendikl errichtet werden, deren Länge in geometrischer Proportion zunehmen, und wenn man endlich durch die Endpunkte dieser Ordinaten eine Linie führt, so heißt eine solche Linie Logistik oder logarithmische Linie.

§. 202. **Zusatz.** Da die Abscissen fortgehen, wie 1, 2, 3 u. s. f. Die Ordinaten hingegen wie 1, 2, 4, 8; oder wie 1, 3, 9 u. d. gl. so ist es ausgemacht daß jede Abscisse der Logarithm ihrer Ordinate sey.

§. 203. **Zusatz.** Weil zwischen einer geometrischen und arithmetischen Proportion sich nicht wohl eine Gleichung in endlichen Größen anstellen läßt, so muß die Zuflucht zum Unendlichkleinen d. i. zu den Differentialen genommen werden.

§. 204. **Lehrsatz.** Zieht man zu zwo Ordinaten zwo gleich weit entfernte unendlich nahe Parallelinien, so verhalten sich die Differentialen dieser Ordinaten, wie die Ordinaten selbst.

Fig. 38

Beweis.

$$MP : mp = NQ : nq \quad \text{oder}$$
$$\text{aber} \quad MP : (mp - MP) = NQ : (nq - NQ)$$
$$\text{oder} \quad y : dy = Y : dY$$

§. 205. **Zusatz.** Indem jedes Verhältniß durch Zuziehung einer beständigen Größe, wie wir es bey den Kegelschnitten erfuhren, in eine Gleichung verwandelt werden kann, so wird, wenn die beständige Größe $= p$, und die neue Funktion das Differential der Abscisse $= dx$, die Gleichung so heissen müssen.

$$y : dy = p : dx$$
$$y = \frac{p\,dy}{dx}$$

§. 206. **Lehrsatz.** Der Parameter der Logistik ist gleich ihrer Subtangente.

Satz.

$p =$ Subtang.

Beweis.

$$y = \frac{p\,dy}{dx}$$

$\times dx$	ydx	$=$	$p\,dy$
$: dy$	$\frac{ydx}{dy}$	$=$	p
aber	$\frac{ydx}{dy}$	$=$	Subtang.
	p	$=$	Subtang.

§. 207. **Zusatz.** Es ist also die Subtangente der Logistik für jeden Punkt derselben beständig, so wie die Subnormal der Parabel.

§. 208. **Zusatz.** Nimmt man die Subtangente, oder den Parameter $= 1$ an, so wird

$$\frac{ydx}{dy} = 1$$
$$ydx = dy$$
$$dx = \frac{dy}{y} = y^{-1}\,dy$$

Folg-

Folglich ist das Differential, welches die Urgröße mit einer negativen Einheitpotenz vor sich hat, dem Abscissendifferential der Logistik gleich. Da nun dx als Differential der Abscisse zugehört, und die Abscisse der Logarithm ihrer Ordinate ist, so muß $S(y^{-1}dy)$ oder $S\left(\frac{dy}{y}\right) = x = \text{Log. } y$ seyn.

Denn würde man einen solchen Ausdruck nach den gemeinen Regeln integrieren, so gäbe er etwas Unendliches, welches verräth, daß man anders zu verfahren habe. Indeß ist dieß doch nichts weniger als ein Ausnahm in der Mathematik. $\frac{x^0}{0}$ ist eine beständige Größe; folglich hat sie kein Differential: demohngeachtet nimmt selbe obige Gestalt an, wenn sie differentiert wird; weil $\frac{0 \times x^{-1} \times dx}{0} = x^{-1}dx$ ist, daher kann $S(x^{-1}dx)$ nicht eigentlich dem $\frac{x^0}{0}$ gleich seyn, und muß zu andern Regeln die Zuflucht genommen werden.

§. 209. **Aufgabe.** Man soll den Werth von x oder von $S(y^{-1}dy) = \text{Log. } y$ bestimmen, das heißt, den natürlichen Logarithm für jede Zahl finden.

Auflösung. Setze man I $y = 1 - z$, so ist

$$dy = -dz$$

div. durch $y = 1 - z$

$$y^{-1}dy = \frac{-dz}{1-z} = -dz - zdz - z^2dz - z^3dz \ldots$$

S

$$S(y^{-1}dy) = -z - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 \ldots.$$

aber $S(y^{-1}dy) = \text{Log. } y = \text{Log. } (1-z)$

$$\text{Log}(1-z) = -z - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 \ldots.$$

Es sey II $y = 1+z$

folglich $dy = dz$

wieder div. durch $y = 1+z$

$$y^{-1}dy = \frac{dz}{1+z} = dz - z\,dz + z^2\,dz - z^3\,dz \ldots.$$

und $S(y^{-1}dy) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 \ldots.$

allein $S(y^{-1}dy) = \text{Log. } y = L(1+z)$

Also $\text{Log. } (1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 - \tfrac{1}{5}z^5 \ldots.$

und Nro I $\text{Log. } (1-z) = -z - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \tfrac{1}{5}z^5 \ldots.$

$+ \quad + \quad + \quad +$

$$\text{Log. } (1+z) - \text{Log. } (1-z) = L\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2z + \tfrac{2}{3}z^3 - \tfrac{2}{5}z^5 \ldots.$$

oder $= 2(z + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{5}z^5 \ldots.)$

Setzt man z. B. $z = \tfrac{1}{5}$, so ist $\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \tfrac{6}{5} : \tfrac{4}{5} = 6 : 4 = \tfrac{3}{2}$;

Ist hingegen $z = \frac{1}{7}$, so wird $\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{8}{7} : \frac{6}{7} = 8 : 6 = \frac{4}{3}$

Nun ist Log. $\frac{3}{2}$ + Log. $\frac{4}{3}$ = Log. $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3}$ = Log. $\frac{12}{6}$ = Log. 2.

Es dürfen demnach nur die Logarithm von $\frac{3}{2}$ und $\frac{4}{3}$ nach der obigen Reihe bestimmt werden, so muß ihre Summe der natürliche Logarithm von der Zahl 2 seyn.

$$\text{Log. } \tfrac{3}{2} = 2\left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3} \times \left(\tfrac{1}{5}\right)^3 - \tfrac{1}{5} \times \left(\tfrac{1}{5}\right)^5 \ldots.\right)$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{5} + \frac{1}{3 \times 125} - \frac{1}{15625} \ldots.\right)$$

$$= 2\left(\frac{75}{375} + \frac{1}{375} - \frac{1}{15625} \ldots.\right)$$

$$= 2\left(\frac{77}{375} - \frac{1}{15625} \ldots.\right)$$

$$= 2\left(\frac{1203125 - 375}{5859375} \ldots.\right)$$

$$= 2\left(\frac{1202750}{5859375} \ldots.\right) = \frac{2405500}{5859375} = 0{,}41$$

Ferner $\text{Log.}\frac{4}{3} = 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{7}\right)^3 \ldots\right)$

$$= 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{1029} \ldots\right)$$

$$= 2\left(\frac{147+1}{7029}\right) = 2\left(\frac{148}{1029}\right) = \frac{296}{1029} = 0{,}2876$$

Folglich $\text{Log. } 2 = \text{Log.}\frac{3}{2} + \text{Log.}\frac{4}{3} = 0{,}41 + 0{,}28 = 0{,}69$

§. 209. Anmerk. Wollte man diesen Logarithm mit mehr Decimalen berechnet wissen, so dörfte nur die Reihe etwas länger fortgeführt, und die Division durch einen größern Quotus verfolgt werden. Uebrigens ist die Arbeit, natürliche Logarithmen zu finden, ungleich leichter als die Berechnung der dekadischen des Briggs.

§. 210. Anmerk. Hr. Wolfram, Artillerielieutenant in den vereinigten Niederlanden wiedmete ganzer sechs Jahre der Berechnung dieser natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen, und machte sich daher um die höhere Mathematik höchst verdient, weil diese Logarithmen vorzüglich gute Dienste bey schwerern Integrationen leisten. Sie wurden Schulzens neuer und erweiterter Sammlung logarithmischer u. a. Tafeln einverleibt, und sind von 1 bis 2200 für alle Zahlen in 40 Decimalen berechnet: von da fort bis 10000, finden sie sich aber nur mehr für die Prim- und andere stark kombinierte Zahlen vor; weil sich die übrigen leicht durch Addieren ersetzen lassen. Die natürlichen Logarithmen halten das Mittel zwischen allen künstlichen, die was immer für eine geometrische Proportion zur Basis haben, und deßwegen heißen sie auch, denke ich, natürlich. Hyperbolisch nennt man sie aus der Ursache, weil die Hyperbel zwischen den Assymtoten ebenfalls diese Logarithmen zu finden dient, und durch Hilfe derselben quadriert werden kann.

Oben genannter Schulze rückte auch eine kurze Anleitung ein, jeden briggischen Logarithm in einen hyperbolischen zu verwandeln: ich will sie, um sich im Benöthigungsfalle helfen zu können, ganz hieher setzen. Man braucht hierzu die kleine Tabelle, wo für jedes Ziffer eines dekadischen Logarithms eine solche Zahl gesetzt werden muß.

1	2,302585
2	4,605170
3	6,907755
4	9,210340
5	11,512925
6	13,815510
7	16,118095
8	18,420680
9	20,723265

Folgendes Beyspiel soll die ganze Verfahrungsart sattsam aufklären. Es sey der dekadische Logarithm von 1987 = 3,2981979 gegeben, so verwandelt er sich auf diese Art in einen hyperbolischen:

3,2981979

statt 3 . . . 6,9077553
2 4605170
9 2072326
8 184206
1 2302
9 2072
7 161
9 20

7,5943810 der natürliche Logarithm von der Zahl 1987, wo bloß das letzte Ziffer 0 gefehlt ist und 4 heißen soll; daher können manchmal die Ziffer am Ende um 1 verstärkt werden; vorzüglich wenn die nächstfolgenden sehr groß sind und im Anschreiben weggelassen werden müssen.

§. 211.

§. 211. **Aufgabe.** Die Hyperbel durch Hilfe des logarithmischen Differenzials quadrieren.

Auflösung. Es ist bey jeder Hyperbel

$$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}c^2 = \frac{4c^2v^2 - c^2a^2}{4a^2} = \frac{c^2}{4a^2}(4v^2 - a^2)$$

$$y = \frac{c}{2a}\sqrt{4v^2 - a^2}$$

$$y\,dv = \frac{c\,dv}{2a}\sqrt{4v^2 - a^2}$$

Es ist aber $\sqrt{4v^2 - a^2} = 2v - \frac{a^2}{4v} - \frac{a^4}{64v^3} - \frac{a^6}{512v^5} \ldots\ldots$

Folglich subst. $y\,dv = \frac{c\,dv}{2a}\left(2v - \frac{a^2}{4v} - \frac{a^4}{64v^3} - \frac{a^6}{512v^5} \ldots\ldots\right)$

$$= \frac{cv\,dv}{a} - \frac{ca\,v^{-1}\,dv}{8} - \frac{ca^3v^{-3}}{128} - \frac{ca^5v^{-5}}{1024} \ldots\ldots$$

$$S(y\,dv) = \frac{cv^2}{2a} - \frac{ca\,Log.\,v}{8} + \frac{ca^3v^{-2}}{256} + \frac{ca^5v^{-4}}{4096} \ldots\ldots$$

oder $= \frac{c\,v^2}{2\,a} = \frac{c\,a\,Log.\,v}{8} + \frac{c\,a^3}{256\,v^2} + \frac{c\,a^5}{4096\,v^4} \ldots\ldots$

Also die ganze Hyp. $= \frac{c\,v^2}{a} - \frac{c\,a\,Log.\,v}{4} + \frac{c\,a^3}{128\,v^2} + \frac{c\,a^5}{2048\,v^4} \ldots\ldots$

§. 212. Zusatz. Ist die Hyperbel gleichseitig, so metamorphosiert sich die Reihe in folgende

Quad. Hyp. $= v^2 - \frac{a^2\,Log.\,v}{4} + \frac{a^4}{128\,v^2} + \frac{a^6}{2048\,v^4}$

§. 213. Anmerk. Wenn das obige Exempel §. 195 eine andere Wendung erhält, so haben wir folgende Aufgabe vor uns liegen. Es dörfen nur die äußern Baumreihen der beyden hyperbelförmigen Seitenalleen bleiben, der übrige Platz soll dazwischen mit Rasenstücken belegt werden; wie viel hat man Quadratfuß dazu nöthig?

Auflösung. Weil bey dieser gleichseitigen Hyperbel jede Achse 120, und die Abscisse 80 Schuh hält, so ist, indem $v = \frac{120}{2} + 80 = 60 + 80 = 140$ beträgt, der Quadratinhalt folgende Reihe

$$140^2 - \frac{120^2 \times 2,146128}{4} + \frac{120^4}{128 \times 140^2} + \frac{120^6}{2048 \times 140^4} \ldots\ldots$$

Die positiven Glieder geben ohngefähr bey der Berechnung $140^2 = 19600$

$\frac{120^4}{128 \times 140^2} = 84$

$\frac{120^6}{2048 \times 140^4} = 4$

19688. Das negative Glied

$\frac{120^2 \times 146128}{4} = 7726$

11962 Quadratschuhe.

§. 214. **Anmerk.** Die Hyperbel wurde hier ohne Zuziehung der Assymtoten quadriert, folglich dorften auch die hyperbolischen Logarithmen nicht gebraucht werden, sondern die dekadischen, weil sie übrigens mit unsern Zahlensystem am besten harmonieren. Hätte man sich des hyperbolischen Logarithms von 140, welcher 4,94164 ist, bedient, so würden hier am Ende nur 1898 Füße herausgekommen seyn, welches offenbar zu wenig wäre; denn sucht man hier aus der Gleichung $y^2 = ax + x^2$ den Werth der Ordinate, so erhält man dafür 128 Schuhe, dieß nun mit der Abscisse 80 multipliciert, giebt 10240 Quadratfuß, das ganze Dreyeck, wovon die Doppelordinate die Grundlinie, und die Abscisse die Höhe ist; weil aber die Hyperbelfläche größer seyn muß, als dieses Dreyeck; indem sich die Kurve in beyden Seiten darüber hinausschwingt, so wäre das Resultat mit hyperbolischen Logarithmen viel zu wenig. Es folgt also schon aus diesem einzigen Beyspiel, daß man in solchen Fällen zu den gemeinen Logarithmen die Zuflucht zu nehmen habe. Ich würde vielleicht zu weitläuftig seyn, wenn ich hier auch die Methode zeigte, die Hyperbel durch Hilfe der Assymtoten zu quadrieren.

§. 215. **Anmerk.** Ueberhaupt sind die Mathematiker in Behandlung der logarithmischen Differentialien noch nicht ganz einig. Die allermeisten schweigen, in soweit es dabey auf die Anwendung ankömmt, gänzlich. Abel Burja, der in diesen Stück sehr tief eindringt, und den großen Analysten Kästnern, Eulern u. d. gk. glücklich nachdenkt, drückt sich am Ende so aus. „Die Integralrechnung ist bis daher „noch keine vollständige Kunst; sondern sie besteht meistens in „mehr oder weniger Versuchen, welche verschiedne große Ma„thematiker gemacht haben, um die dahin einschlagenden Auf„gaben aufzulösen." Die Sache setzt zu viele und manigfaltige Kenntnisse der Exponentialrechnung, der unendlichen Reihen und der Funktionen voraus, welche wir hier wegen den engen Raum nicht abhandeln können.

§. 216.

§. 216. Aufgabe. Die Oberfläche eines hyperbolischen Afterkegels bestimmen.

Auflösung. $2ydy = \frac{2c^2vdv}{a^2}$

quad. $4y^2dy^2 = \frac{4c^4v^2dv^2}{a^4}$

$+4y^2dv^2 = +4y^2dv^2$

$4y^2dy^2 + 4y^2dv^2 = \frac{4c^4v^2dv^2}{a^4} + 4y^2dv^2$

oder $4y^2(dy^2 + dv^2) = \frac{4c^4v^2dv^2}{a^4} + 4dv^2\left(\frac{c^2v^2}{a^4} - \frac{1}{4}c^2\right)$

$= \frac{c^2dv^2}{a^4}(4c^2v^2 + 4a^2v^2 - a^4)$

$2y\sqrt{dy^2 + dv^2} = \frac{cdv}{a^2}\sqrt{4(a^2 + c^2)v^2 - a^4}$

Und ist wieder $4(a^2 + c^2) = m$ so kömmt

$2y\sqrt{dy^2 + dv^2} = \frac{cdv}{a^2}\sqrt{mv^2 - a^4}$

Aber

Aber $\sqrt{m v^2 - a^4} = m^{\frac{1}{2}} v - \frac{a^4 v^{-1}}{m^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^8 v^{-3}}{8 m^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^{12} v^{-5}}{16 m^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots$

Folgl. $2 y \sqrt{dy^2 + dv^2} = \frac{c dv}{a^2}\left(m^{\frac{1}{2}} m - \frac{a^4 v^{-1}}{m^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^8 v^{-3}}{8 m^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^{12} v^{-5}}{16 m^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots \right)$

$= \frac{m^{\frac{1}{2}} c v dv}{a^2} - \frac{a^2 c v^{-1} dv}{m^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^6 c v^{-3} dv}{8 m^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^{10} c v^{-5} dv}{16 m^{\frac{5}{2}}} \ldots$

Xπ $2\pi y \sqrt{dy^2 + dv^2} = \pi\left(\frac{m^{\frac{1}{2}} c v dv}{a^2} - \frac{a^2 c v^{-1} dv}{m^{\frac{1}{2}}} \text{ \&c.} \right)$

Wenn $S(2\pi \sqrt{dy^2 + dv^2}) = \pi\left(\frac{m^{\frac{1}{2}} c v^2}{2 a^2} - \frac{a^2 c \times Log. v}{m^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^6 c}{16 m^{\frac{3}{2}} v^2} - \frac{a^{10} c}{64 m^{\frac{5}{2}} v^4} \ldots \right)$

Wenn man endlich für m seinen Werth $4(a^2 + c^2)$ setzt, wo demnach

$$m^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{a^2 + c^2}$$

$$m^{\frac{3}{2}} = 8\sqrt{(a^2 + c^2)^3}$$

$$m^{\frac{5}{2}} = 32\sqrt{(a^2 + c^2)^5}$$ gielt, so erscheint die Reihe für die Oberfläche in dieser Gestalt:

$$\pi\left(\frac{c\,v^2\sqrt{a^2+c^2}}{a^2} - \frac{a^2\,Log.\,v}{2\sqrt{a^2+c^2}} + \frac{a^6\,c}{128\,v^2\sqrt{(a^2+c^2)^3}} + \frac{a^{10}\,c}{2048\,v^4\sqrt{(a^2+c^2)^5}} \cdots\right)$$

§. 217. **Zusatz.** Hat der Afterkegel gleiche Achsen, so bekommen wir folgenden Ausdruck:

$$\pi\left(\frac{a\,v^2\sqrt{2\,a^2}}{a^2} - \frac{a^3\,Log.\,v}{2\sqrt{2\,a^2}} + \frac{a^7}{128\,v^2\sqrt{(2\,a^2)^3}} + \frac{a^{11}}{2048\,v^4\sqrt{(2\,a^2)^3}} \cdots\right)$$

§. 218.

$$= \pi\left(v^2\sqrt{2} - \frac{a^2\,Log.\,v}{2\sqrt{2}} + \frac{a^4}{512\,v^2\sqrt{2}} + \frac{a^6}{32768\,v^4\sqrt{2}} \cdots\right)$$

§. 218. **Anmerk.** Zu allerlezt noch ein Beyspiel. Die Kuppel eines gothischen Tempels, die eine gleichseitige Hyperloide vorstellt, soll mit Kupferblech gedeckt werden, wie viel wird man dazu Quadratfüsse nöthig haben, wenn die Kuppel in der Höhe 20, und in der untersten Weite 44 Schuhe hält?

Auflösung. Aus der gegebenen Abscisse und der Doppelordinate läßt sich gemäß der Gleichung $y^2 = ax + x^2$ die Achse sehr leicht bestimmen. Es ist nämlich

$$22^2 = a \times 20 + 20^2$$
$$484 = 20a + 400$$
$$400 \qquad\qquad 400$$
$$84 = 20a$$
$$:20 \quad 4\tfrac{1}{5} = a$$
$$\text{oder} \quad 4{,}2 = a$$

Weil nun $v = 20 + \frac{4{,}2}{2} = 20 + 2{,}1 = 22{,}1$ so wird die Reihe, da $\sqrt{2} = 1{,}414$ ist, für den besondern Fall so aussehen

$$3{,}14\left((22{,}1)^2 \times 1{,}414 - \frac{(4{,}2)^2 \times 1{,}3222}{2 \times 1{,}414} + \frac{(4{,}2)^4}{512 \times (21{,}1)^2 \times 1{,}414} \ldots\right)$$
$$3{,}14\,(690{,}61 - 23{,}32 \ldots = 3{,}14 \times 667{,}29$$
$$= 2095{,}29 \text{ Quadratschuhe.}$$

Von der umgekehrten Methode der Tangenten.

§. 219. **Erkl.** Man versteht unter dieser Methode die Lehre, aus einer gegebnen Tangente, Subtangente, Normal, Subnormal, Rektifikation, Quadratur, Kubatur, oder Oberflächen-

ausdruck irgend einer krumen Linie, die Kurve selbst, welcher so eine Tangente u. d. gl. zugehört, wieder daraus zu bestimmen.

§. 220. Zusatz. Die obige Benennung dieser Lehre ist daher nicht am besten angepaßt: man würde vielleicht treffender sagen: Die umgekehrte Methode des Differentialkalkuls in Hinsicht auf die krummen Linien.

§ 221. Aufgabe. Welcher Kurve kömmt die Subnormal $\frac{1}{2}a - x$ zu?

Auflösung. Man setze den gegebnen Ausdruck dem allgemeinen der Subnormal gleich, schicke die Gleichung zum Integrieren an, und suche für y^2 nach der Integration den entsprechenden Werth. Also

$$\frac{1}{2}a - x = \frac{y\,dy}{dx}$$

$$x\,dx \qquad \frac{a\,dx}{2} - x\,dx = y\,dy$$

$$\text{Integ.} \quad \frac{ax}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$$

$$\times 2 \qquad ax - x^2 = y^2$$

welche Gleichung für den Zirkel gehört; also ist der Zirkel allein jene Kurve, die die Subnormal $\frac{1}{2}a - x$ hat.

§. 222. Aufgabe. Welcher Kurve gehört die Quadratur $\frac{2}{3}x\sqrt{px}$ zu?

Auflösung. Man differenziere den gegebenen Ausdruck und setze ihn mit dem Flächenelement in eine Gleichung. Es ist aber

$$d(\tfrac{2}{3}$$

$d(\frac{2}{3} x \sqrt{px}) = d(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}}) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$

$= p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$

Also $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = y dx$

$:dx \quad p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$

quad. $px = y^2$ Folglich muß diese Linie eine Parabel seyn.

§. 223. Aufgabe. Wie heißt die krume Linie deren Subtangente beständig ist?

Auflösung. Es sey die beständige Größe $= p$, so ist

$$p = \frac{y dx}{dy}$$

$$p dy = y dx$$

$:dx \quad \frac{p dy}{dx} = y$ die Gleichung für die Logistik

§. 223. Aufgabe. Giebt es auch eine Kurve, deren Subnormal beständig ist?

Auflösung. Man setze die beständige Größe $= q$, so giebt dieß

$$q = \frac{y dy}{dx}$$

$x dx \quad q dx = y dy$

Integ. $qx = \frac{y^2}{2}$

$x 2 \quad 2qx = y^2.$

Ist nun $2q = p$, so wird

$px = y^2$ seyn.

Das heißt, die Linie ist die apollonische Parabel.

§. 224.

§. 224. **Aufgabe.** Wie müßte eine Linie von der Beschaffenheit konstruiert werden, daß die Subtangente so groß wäre als das Quadrat der Ordinate?

Auflösung.

$$\frac{y\,dx}{dy} = y^2$$

$$:y \qquad \frac{dx}{dy} = y$$

$$dx = y\,dy$$

Integ.

$$x = \frac{y^2}{2}$$

$$\times 2 \qquad 2x = y^2$$

Werden nun einige x nach Belieben angenommen, und zwischen ihnen und der Zahl 2 eben so viele mittlere Proportionalen gesucht, so erhält man Ordinaten einer solchen Linie.

§. 225. **Aufgabe.** Wie sieht die Kurve aus, wovon sich die Kubatur des aus ihr erzeugten Körpers durch $\pi\left(\frac{3\,a\,c^2\,x^2 + 2\,c^2\,x^3}{6\,a^2}\right)$ ausdrücken läßt?

Auflösung. Es ist

$$d\left(\pi\left(\frac{3\,a\,c^2\,x^2 + 2\,c^2\,x^3}{6\,a^2}\right)\right)$$

$$= \pi\left(\frac{6\,a\,c^2\,x\,dx + 6\,c^2\,x^2\,dx}{6\,a^2}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{a\,c^2\,x\,dx + c^2\,x^2\,dx}{a^2}\right)$$

Folglich heißt die Gleichung

$$\pi\,y^2\,dx = \pi\left(\frac{a\,c^2\,x\,dx + c^2\,x^2\,dx}{a^2}\right)$$

$$:\pi$$

$$:\pi \qquad y^2\,dx = \frac{ac^2\,x\,dx + c^2\,x^2\,dx}{a^2}$$

$$:dx \qquad y^2 = \frac{ac^2\,x + c^2\,x^2}{a^2}$$

oder $y^2 = \frac{c^2\,x}{a} + \frac{c^2\,x^2}{a^2}$ welches die Hyperbeläquation ist, wenn statt dem Parameter die kleine Achse gebraucht wird.

§. 226. **Aufgabe.** Die Quadratur einer krumen Linie kann durch die unendliche Reihe $\frac{cv}{2} - \frac{cv^3}{3a^2} - \frac{cv^5}{5a^4} \ldots$ ausgedrückt werden; wie mag die Gleichung davon aussehen?

Auflös. Man differenziere allererst die Reihe

$$d\left(\frac{cv}{2} - \frac{cv^3}{3a^2} - \frac{cv^5}{5a^4} \ldots\right)$$

$$= \frac{c\,dv}{2} - \frac{3cv^2\,dv}{3a^2} - \frac{5cv^4\,dv}{5a^4} \ldots$$

$$= \frac{c\,dv}{2} - \frac{cv^2\,dv}{a^2} - \frac{cv^4\,dv}{a^4} \ldots$$

so entsteht die Gleichung

$$y\,dv = \frac{c\,dv}{2} - \frac{cv^2\,dv}{a^2} - \frac{cv^4\,dv}{a^4} \ldots$$

$$:dv \qquad y = \frac{c}{2} - \frac{cv^2}{a^2} - \frac{cv^4}{a^4}$$

quad. $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2v^2}{a^2} - \frac{c^2v^4}{a^2} + \frac{c^2v^4}{a^4} \ldots$

also $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2\,v^2}{a^2}$ das heißt die krume Linie ist die Ellipse.

§. 227. **Anmerk.** Indeß bleibt diese Art der umgekehrten Methode aus unendlichen Reihen die ursprüngliche Gleichung jener Linie, woraus sie abstammt, wieder zu entwickeln immerhin mühsam; ja es ist oft alles Bemühen fruchtlos, weil dabey Vortheile sollen angewendet werden, die bis daher noch nicht entdeckt sind.

§. 228. **Aufgabe.** Giebt es auch eine Linie deren Quadratur $\frac{1}{2}xy$ ist?

Auflösung. $d(\frac{1}{2}xy) = \frac{x\,dy + y\,dx}{2}$

Folglich $ydx = \frac{x\,dy + y\,dx}{2}$

$$:dx \qquad y = \frac{x\,dy}{2\,dx} + \frac{y}{2}$$

$$-\frac{y}{2} \qquad -\frac{y}{2}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{x\,dy}{2\,dx}$$

$xy \qquad y = \frac{x\,dy}{dx}$, und in eine Proportion aufgelöset, giebt

$y : x = dy : dx$. Es ist dieß demnach eine Linie, wo sich Abscisse und Ordinate wie ihre Differentialen verhalten, welches aber nur in geradlinichten Dreyecken möglich ist. Ein Beweis, daß sich diese Methode auch auf gerade Linien erstreckt.

§. 225. **Anmerk.** Nun träffe die Reihe noch die übrigen krumen Linien, z. B. Zikloide, Chonchoide, Cissoide u. d. gl., so auch die Artikel vom Krümmungsstralle, vom Wendepunkt der Kurven, von verschiedenen Evoluten, von Linien doppelter Krümmung u. s. f. Weil wir uns aber vorzüglich auf die Kegelschnitte einschränkten, und selbe auch wirklich etwas weitläuftig abhandelten, so wollen wir sie für dießmal weglassen. Vielleicht giebt es Gelegenheit, ihnen ein besonders Bändchen einzuräumen, wo wir dann mit selben mehr ins Detail gehen können, als es hier wegen Einschränkung des Raumes geschehen dorfte.

Geschichte der Kugeldreyecks lehre.

Astronomie, Geographie und zum Theil auch die Gnomonik waren die drey wichtigen Beschäftigungen der Menschen, welche die Kugeldreyecks lehre, oder wie sie sonst genennt wird, die sphärische Trigonometrie zu einem Hauptbedürfniße der nützenden Gelehrsamkeit gemacht haben. Es wird daher, denke ich, Niemand die Behauptung übertrieben finden, daß die sphärische Trigonometrie so alt, als die Astronomie selbst sey. Die Unternehmungen des Hyparchus in dieser Wissenschaft sowohl als in der Geographie, da er nach dem Zeugniße des Strabo der erste war, welcher die Lage der Oerter auf der Erde nach Länge und Breite bestimmte, fordern zu viele trigonometrische Rechnungen dieser Art, als daß sich etwas solches ganz ohne selben leisten ließe. Noch erstaunungswürdiger sind die astronomischen Arbeiten des Ptolomäus in seinem Almagest, welches so lange als das beste und wichtigste Werk in der Astronomie angesehen wurde. Freylich mögen damals die Lehrsätze dieser Wissenschaft noch in kein ordentliches System gebracht worden seyn, wie heut zu Tage; es mögen auch mehrere solche Sätze, theils ganz gemangelt, theils einer bessern Entwicklung bedürft haben. Indessen waren die Materialien zu

selben doch da. Wirklich hat dieß Geber, ein arabischer Astronom, welchen Snellius einen Oforem calculorum nennt, weil er, wie es heißt, weitläuftige Rechnungen gewaltig scheute, sattsam bewiesen. Er kommentierte über obengenannten Almagest, und lieferte bald darauf eine kurze Abhandlung der sphärischen Trigonometrie, worinn er seine erfundnen Lehrsätze, rechtwinklichte Kugeldreyecke zu berechnen, mit unter vortrug. Zwar schrieb auch schon Menelaus von Alexandrien, der zu Ende des ersten Jahrhunderts lebte, und sich ebenfalls die Astronomie zum Lieblingsstudium machte, ein Werk in 3 Bänden von den sphärischen Triangeln, wo aber Gebers erfundne Lehrsätze noch nicht darinn zum Vorschein kommen, folglich kein so vollständiges Lehrgebäude seyn konnte.

Demohngeachtet hatte diese Wissenschaft gleiches Schicksal mit ihrer Schwester der ebnen Trigonometrie. Ihre Rechnungen waren erstaunlich weitläuftig und ermüdend, bis endlich mit Anfange des vorigen Jahrhunderts zur größten Wohlthat der gesammten Mathematik die Logarithmen erfunden wurden. Die Geschichte der Logarithmenerfindung, die ich am Ende meiner Geometrie kurz anführte, gehört also beyden Trigonometrien gemeinschaftlich.

Bis auf Nepern und Christian Wolfen erhielt übrigens die Kugeldreyeckslehre keine merklichen Verbesserungen oder erhebliche Zusätze, wie die übrigen Aeste der Mathematik. Ersterer erfand eine allgemeine Regel für sämmtliche Auflösungen rechtwinklichter Dreyecke: Wolf hingegen, obwohl er die ebne Trigonometrie unter allen seinen abgehandelten

delten Wissenschaften am unvollständigsten vortrug, bewies sich doch in der sphärischen noch glücklicher als Meyer; denn seine Regel bezieht sich auch auf die schiefwinklichten Dreyecke. Es sind bey ihm alle Fälle, zween ausgenommen, wo nämlich aus den Seiten die Winkel und aus den Winkeln die Seiten bestimmt werden sollen, in dieser kurzen Formel enthalten: r X cos. m = sin s X sin S = cot a X cot A, wo r den Radius, m *partem mediam*, s und S *sejunctas*, a und A *adjacentes* bedeuten.

Noch glücklicher als Wolf war Lambert, welcher einen allgemeinen Beweis aller Regeln der sphärischen Trigonometrie und eben darum eine einzige allgemeine Regel ihrer Ausübung erfand. Herr Prof. Kies hat nach Klemms Zeugniß diese Lehre gleichfalls in einer akademischen Abhandlung 1758 sehr ausführlich und gründlich vorgetragen. Abt Häseler widmete diesem Theile der Mathematik in seinen Anfangsgründen einen eignen Band, und handelte ihn so vollständig und originál ab, als vielleicht noch keiner oder wenige vor ihm gethan haben. Er hat darinn ein besonders Verdienst, daß man sein ganzes System ohne Figuren von Drath oder Pappendeckel und ohne mühsame Perspektivzeichnungen verstehen kann. Die wichtigsten Lehrsätze leitet dieser Mathematiker aus den Formelausdrücken der ebnen Trigonometrie her. Er weis auch dieses für Anfänger so trockne Studium am Ende durch eine leichte Anwendung auf die Astronomie und Geographie sehr angenehm und interessant zu machen.

Geschichte der höhern Mathematik.

Bedürfniß, wie bey der Elementargeometrie und den übrigen Zweigen der Matheſe, konnte es eigentlich nicht ſeyn, was die Erfindung der höhern Mathematik veranlaßte; ſo unentbehrlich ſie auch heut zu Tag in manchem Fache geworden iſt. Das Vergnügen eines raſtloſen Forſchgeiſtes, aus der reinſten Wahrheitsquelle, die nur in dem mathematiſchen Gebiete angetroffen werden kann, noch ferner und ferner zu ſchöpfen, däucht mir, wo nicht die einzige, doch die thätigſte Triebfeder, ſowohl der Erfindung, als der Erweiterung dieſer erhabnen Wiſſenſchaft geweſen zu ſeyn.

Die urſprünglichſten Spuren derſelben trift man ſchon in der Schule des Plato an, da man ihn ſelbſt für den erſten hält, welcher die Eigenſchaften der Kegelſchnitte ſeiner Unterſuchung würdig fand, und da die Entdeckung der für die Alten ſo wichtigen Wiſſenſchaft von den geometriſchen Oertern eine vorzügliche Frucht ſeiner Schule war.

Beyläufig 100 Jahre nach Plato ſtand Archimedes auf, der ſich hauptſächlich durch die Quadratur krummer Linien auszeichnete. Die Methode, mit der er zu Werke gieng, die Parabel zu quadrieren, ſcheint mir noch ſinnreicher zu ſeyn, als deſſen Erfindung des Verhältnißes der Kugel und des Zylinders in der Elementargeometrie.

Nun kömmt die Reihe an Appollonius Pergäus, welcher in der höhern Matheſe gerade das iſt, was Euklides, unter deſſen Nachfolger er gehört,

hört, in der Elementargeometrie war. Pergen in Pamphilien ist seine Vaterstadt und das Zeitalter desselben fallt etwa 40 Jahre nach Archimedes Flor. Zu Alexandrien studierte er die Mathematik, und gab hier auch 8 Bücher von den Kegelschnitten in griechischer Sprache heraus, worinn er alles zusammfaßte, was seine Vorgänger Aristes, Eudoxus, Menechmus, Euklides, Conon und Archimedes in diesem Fache geleistet hatten. Appollonius war der erste, welcher zeigte, daß man aus jedem Kegel alle drey Kurven erhalten könne; da man doch vorher irrig glaubte, die Parabel fodere einen rechtwinklichten, die Ellipse einen spitzwinklichten und die Hyperbel einen stumpfwinklichten Kegel. Es ist dieses Buch bis auf die Epoche der Analyse des Unendlichen die Normal der höhern Mathematik nach dem Beyspiele des Euklides in seiner Sphäre geblieben.

Man hatte aber anfänglich nur die vier ersten Bücher, und erst im vorigen Jahrhunderte fand Alphonsus Borelli bey seiner Reise durch Florenz das fünfte, sechste, und siebende Buch in einem arabischen Manuscripte, und gab sie in einer lateinischen Uebersetzung zu Rom 1661 in Folio heraus. Eben diese drey Bücher soll auch ein gewisser Jakob Golius in arabischer Sprache, beyläufig um die nämliche Zeit, aus Orient erhalten und ins Latein übersetzt haben. Das letzte Buch des Appollonius noch ausfindig zu machen, gaben die Gelehrten bereits alle Hofnung auf, bis endlich dem Edmund Halley, Prof. der Geom. zu Oxfort, zufälliger Weise in der bodlejanischen Bibliothek ein arabisches Manuscript in die Hände gerieth. Uebrigens sind diese Bücher äusserst abstrakt und dunkel

abge-

abgefaßt, und wir können sie itzt sehr wohl entbehren. Eine Menge Mathematiker haben in der Folge darüber kommentiert. Der erste unter denselben war Pappus von Alexandrien, welcher vor dem fünften Jahrhundert nach Kristus Geburt collectanea mathematica erscheinen ließ, wovon aber die ersten zwey Bücher nicht ganz mehr auf uns gekommen sind. Er gedenkt in selben des Aristes, eines griechischen Mathematikers, der der Liebling des Euklides war und ebenfalls Schriften über die höhere Geometrie herausgab. Auf Pappus folgt Hypatia die Tochter Theons, eine große Philosophin und Mathematikerin, deren trauriges Ende in der Blüthe ihrer Jahre zur Kirchengeschichte gehört, und in Zimmermanns Werke von der Einsamkeit ausführlich beschrieben ist. Im sechsten Jahrhunderte wagte sich Eutocius mit vielem Glücke über die Auseinandersetzung seiner Dogmen. Hier darf auch jener persische Gelehrte Nassir Eddin nicht vergessen werden, der eben so richtig über den Appollonius als den Euklides glossierte.

Nun traf der allgemeine tiefe Schlaf der Wissenschaften unter den Christen auch die höhere Mathematik, bis endlich zu Anfang des siebenzehnten Jahrhunderts durch Leibnitz in Deutschland, durch Neuton und Wallis in Brittanien, durch den Descartes und Marquis de l'Hopital in Frankreich, und endlich durch die Bernoulle in der Schweitz eine neue und ungleich glänzendere Epoche für die höhere Mathematik began. Hier ist die kennbarste Gränzlinie zwischen der alten und neuen Theorie derselben gezogen. Die Rechnung des Unendlichen welche von diesen Männern theils erfunden, theils

erwei-

erweitert, und zu einiger Vollkommenheit gebracht worden, hat so viel gemeinnütziges, so viel erhabenes, so viel göttliches, daß sie die Erfindungen der Alten in diesen Stücke, wie der Sonnenglanz die schwachblinkenden Sterne verdunkelt. Isaak Barrow, der Lehrer des großen Neutons, welcher in der Mitte des siebenzehnten Jahrhunderts zu Cambridge und Gresham als Professor der Mathematik glänzte, gab unstreitig den Ton dazu an. Er war der Erfinder des sogenannten *Trianguli characteristici*, und bezeichnete die Differentialen der Ordinate und Abscisse d y und d x durch a und e. Wink genug für seinen Nachfolger Neuton, und für seinen deutschen Freund und Korrespondenten Leibnitz, welche gleich große, erfinderische Köpfe waren, die entdeckte Spur zu verfolgen, und zum nämlichen Ziel auf verschiednen Wegen zu gelangen.

Die Engländer nennen die Rechnung des Unendlichen mit ihrem Neuton Fluxionenrechnung, und wir Deutsche heißen sie mit unserm Leibnitz Differentialrechnung. Jene bezeichnen eine Fluxion d. i. ein Differential von x oder y durch x· und y·; wir hingegen durch d x und d y. Im Grunde ist demnach die Sache einerley, man mag es so oder so nennen, so oder so bezeichnen; weil doch am Ende die übrige Verfahrungsart und das Resultat das nämliche bleibt.

Ehedem stritt sich die deutsche Parthey heftig und lange mit den Britten, ob Leibnitz oder Neuton der wahre Erfinder der Differentialrechnung war. Die Geschichte hievon steht sehr umständlich in der leibnitzischen Biographie des Chevalier de Jaucourt, so auch in des Montucla's Histoire des

Mathe-

Mathematiques. Der Bescheid endlich dieses langwierigen Streites fiel endlich dahin aus, daß es sehr wohl möglich sey, daß zwey gleich starke Genie's bey ein und der nämlichen Veranlassung auch auf die nämliche Erfindung gerathen. Der sel. Hr. Prof. Böhm, welcher die mathematischen Artikel für die deutsche Encikopedie geliefert, drückt sich bey dieser Gelegenheit so aus: „Der durchdringende „Geist Leibnitzens, vor (für) den nichts zu hoch „war, seine Aufrichtigkeit, womit er bey jeder an„dern Gelegenheit diejenige genennt, die ihn auf „die Spur gebracht, die Menge und Wichtigkeit „seiner andern Erfindungen, die seinen Namen auch „ohne die Entdeckung der Differentialrechnung ewig „ehrwürdig gemacht, und der von den neutonischen „ganz verschiedne Grund, worauf er sene Rechnung „gebaut, würden allein hinreichende Bürgen davon „seyn, daß er sie Neutonen nicht abgeborget, wenn „ihn auch letzterer nicht selbst in der Anmerkung zum „zweyten Lehrsatze des andern Buchs seiner princi„piorum (S. 226. der Ausgabe Amsterdam 1723) „davon freyspräche, indem er sagt: Als ich den „berühmten Mathematiker G. W. Leibnitz, mit „dem ich vor 10 Jahren in Briefwechsel gestan„den, bekannt machte, daß ich eine Methode „besitze, die größten und kleinsten Größen zu „bestimmen, die Tangenten zu ziehen u. s. f. „und durch Versetzung der Buchstaben die Auf„gabe, worauf es ankam (data aequatione quot„cunque fluentes quantitates inuoluente fluxiones „inuenire, et vice versa) ihm verborgen vorlegte, „antwortete er mir, daß er gleichfalls auf eine „solche Methode verfallen sey, und theilte mir „die seinige mit, welche mit der meinigen fast

„gänzlich übereinkömmt, und nur in den Benen-
„nungen, Bezeichnungen, und in der Vorstellung
„von der Weise, wie die Größen entstehen, da-
„von abweichet.“ Zeugniß genug, denke ich, daß Leibnitz eben so gut, als Neuton Erfinder dieser für die Mathematik so äusserst wohlthätigen Entdeckung war.

Indeß hatten beyde ihre Nebenbuhler, welche, wo nicht an der Erfindung, doch an dessen Vervollkommnung keinen geringen Antheil nahmen. Jakob Gregori, ein Schottländer, der 1664 ein Werk de vera Circuli et hyperbolae quadratura (versteht sich durch Approximation) herausgab, wetteiferte in der Anwendung der Analyse des Unendlichen, wie dieß in seinem Buche (Exercitationes geometricae) sattsam erhellet, so ziemlich mit Neuton. Johann Wallis, Prof. der Geom. zu Oxfort, erleichterte diese Rechnung dadurch ungemein, daß er die Brüche, deren Nenner Würden sind, durch ganze Größen mit negativen Exponenten auszudrücken erfand. Giles Persone de Roberval, Prof. der Mathematik auf den Kollegium Gervais, erfand eine Methode Kurven zu quadrieren und deren Tangenten zu ziehen, die in ihren Begriffen und Ausdrücken viel ähnliches mit der Fluxionenrechnung des Neutons hat, und so von andern zu reden.

Kaum war aber die Fehde wegen dem rechtmäßigen Erfinder zu Anfange des 18ten Jahrhunderts geendet, so fieng man an, die Richtigkeit dieses Kalkuls in Zweifel zu ziehen, und förmlich anzustreiten. Unter mehrern andern fiel es auch dem Abt Catelan ein, ihn als eine unnütze Methode auszuzischen. Nieuwentyt und Rolle behaupteten

hartnäckig, die Differentialrechnung wäre irrig, und beruhe auf falschen Gründen.

Aber diese Feinde der guten Sache fanden Widerleger, denen sie nicht gewachsen waren. Den ersten besiegte Marquis de l'Hopital, den zweyten Leibnitz selbst, Bernoulli und Herman; Rolles Kontroverse endlich wurde durch Varignon und Saurin hinlänglich entkräftet. Umständlicher läßt sich diese Streitgeschichte mehrmals in oben angeführtem Montucla lesen.

Leibnitz, der größte Geist, den je Deutschland hervorgebracht, verdient es, daß wir uns mit selben etwas umständlicher bekannt machen. Er wurde zu Leipzig 1646 den 3ten July gebohren. Sein Vater war Professor der Sittenlehre und Aktuarius der dasigen hohen Schule. Schon im fünfzehnten Jahre betrat er die akademische Bahn. Thomasius wurde sein Lehrer in der Weltweisheit, und Kuhnius in der Größenlehre. So befangen die Kenntnisse dieses Mannes waren, und so unangenehm dessen Vortrag noch nebenher ausfiel, so konnten doch diese ungünstigen Umstände die natürliche Neigung Leibnitzens nicht ersticken. Nach zwey Jahren reisete er nach Jena ab, wo ihm nun das Glück an den berühmten Weigel einen bessern Lehrer schenkte. Er verlegte sich hier auch auf die Rechtsgelehrsamkeit, und brachte es so weit, daß man ihm 1666 zu Altorf neben der Doktorswürde auch noch eine ausserordentliche Professur der Rechte antrug. Hier wurde Leibnitz mit einen gewissen Herrn von Boineburg bekannt, welcher ihn beym Churfürsten zu Mainz empfahl, wo er auch wirklich 1669 churfl.

Main-

Mainzischer Revision- und Kanzley-Kammerrath wurde. Weil nun Hr. von Boineburg entschlossen war, seinen Sohn in Paris studieren zu lassen, so wurde Leibnitz mit selbem dahin geschickt. In Paris erfand er eine Rechenmaschine, die der Akademie und dem Minister Kolbert so sehr gefiel, daß sie ihn als ein besoldetes Mitglied aufzunehmen versprachen, wofern er die römische Religion annehmen wollte; welches er aber ausschlug, und bald nachher, weil Hr. von Boineburg gestorben war, nach London reisete. Dort wurde Leibnitz mit Boyle, Wallis, Gregori, Barrow und mit seinem Rival dem Neuton bekannt. Als nun auch der Churfürst von Mainz mit Tod abgieng, kehrte er wieder nach Paris, wo er sich noch 15 Monate aufhielt. Nach Verlauf dieser Zeit unternahm er auch eine Reise durch Franken, Baiern, Schwaben, Oesterreich und Italien vor. Im Jahre 1699 wurde er von der Akademie zu Paris als auswärtiges Mitglied aufgenommen, und bald darauf ward er auch zu Berlin als Direktor der neu errichteten Akademie ernennt. Beyläufig 12 Jahre nachher beschenkte ihn Czaar Peter, der Erste, mit der Würde eines Justizrathes, und einem jährlichen Gehalt von 1000 Rubel. Endlich starb Leibnitz 1716 in einem Alter von 70 Jahren, und hinterließ den Ruhm eines der größten Mathematiker, Naturkündiger, Chimiker, Dichter und Sprachforscher, so, daß Deutschland ewig auf ihn stolz seyn wird.

Seither bedienen sich nun die Mathematiker dieser Infinitesimalrechnung mit dem glücklichsten Erfolge. Selbst in der Physik werden dadurch die schwersten und nützlichsten Probleme mit erstaunlich

leichter Mühe aufgelöset. Johann Bernoulli, Clairaut d'Alembert, Daniel Bernoulli, Maclaurin, Euler, und vorzüglich Käſtner haben ſie zu jener Vollkommenheit gebracht, in welcher ſie dermalen blühet. Man darf wahrhaft zweifeln, wenn man den engen Raum unſrer Lebenstäge, und die Menge anderer Wiſſenſchaften, die einen nahmhaften Bezug auf die ausübende Mathematik haben, beherziget, ob dieſes Studium noch höher könne getrieben werden, als es wirklich geſchehen iſt.

Ich kann nicht umhin, unter den großen Beförderern dieſer tiefſinnigen Wiſſenſchaft auch ein Frauenzimmer unſers Jahrhunderts anzuführen, welches um ſo mehr bewundert zu werden verdient, je weniger man vom ſchönen Geſchlechte Perſonen zählt, die für ernſte Studien eingenommen wären. Sie iſt eine Mayländerinn, mit Namen Maria Gaetana Agneſi. Von ihrem männlichen Genie kann man ſich dadurch leicht einen Vorbegriff machen, wenn man bedenkt, daß ſie neben ihrer Mutterſprache noch vier andere Sprachen redete; daß ſie in ihrem neunten Jahre ſchon eine eigen ausgearbeitete lateiniſche Abhandlung vorlas; daß ſie die Geometrie des Euklides, die Algebra, die Phyſik und Methaphyſik, überhaupt die ganze Philoſophie ſtudierte, und daß ſie endlich einen ſehr brauchbaren Kommentar über des Marquis de l'Hopital Abhandlung von den Kegelſchnitten ſchrieb. Den ausgezeichneſten Ruhm aber erwarb ſie ſich durch ihr großes Werk über die Analyſis des Unendlichen, welches ſie im 30ſten Jahre ihres Alters in zween Quartbänden unter dem Titel herausgab: Inſtituzione analitiche, ad vſo della Giouentu Italiana di

Donna

Donna Maria Gaetana Agnesi, Milanense, dell' Academia delle Scienze di Bologna 1748. Die Pariserakademie bezeugte ihr öffentlich, „es herrsche „Ordnung, Deutlichkeit und Kürze in allen Thei„len desselben; es sey noch in keiner Sprache eine „Anleitung zur Analyse erschienen, die so geschwinde „und so tief in das Innere dieser Wissenschaft „führe: sie (die Akademie) sehe daher diese Schrift „der Agnesi für die vollkommenste und beste in „ihrer Art an." Zwey Jahre nachher bekam sie wirklich zu Bologna eine Professur aus der Mathematik, welche sie aber kaum ein Jahr bekleidete, indem sie beschloß, nach damaliger Sitte ihre übrigen Tage in einem Kloster zu verleben.

Unter den Verbreitern der Differentialrechnung im Deutschlande muß der Freyherr von Wolf am ersten genannt werden. Man giebt ihm zwar Schuld, daß er sie so ziemlich kurz und seicht abgehandelt habe; allein, wenn man seine Zeiten, in welcher er lebte, zu Gemüthe führt, so wird man bald begreifen, daß er unmöglich mehr von der theoretischen höhern Mathematik hätte ausheben können, wenn er je seine Zuhörer und seine gleichzeitigen Leser nicht vollends zurückschrecken wollte. Wolfs Verdienst um die Mathematik bleibt demnach trotz allen Einwendungen seiner Gegner nichts destoweniger immer groß; weil er in Rücksicht seiner Lage doch das leistete, was er leisten konnte.

Von den übrigen Lehrbüchern der höhern Geometrie verdient neben den bekannten des Segners, la Cailles, Karstens und Kästners, welcher letzterer freylich für Einstudierte das beste geliefert, wegen ihrer

Voll-

Vollständigkeit und Anwendung fürs Praktische de la Chapelle, und der öfter erwähnte Abt Häseler, angerühmt zu werden. Schade, daß keiner von der Analyse dabey einen Gebrauch gemacht. Letzterer gab zwar das Wort, noch einen fünften Band zu liefern, in welchem er die Differentialrechnung eben so ausführlich und deutlich vorzutragen verspricht, als es in den 4 ersten Bänden geschehen; worauf ich mich nnd jeder Liebhaber der Deutlichkeit und Vollständigkeit nicht anders als sehnlichst freuen kann und muß.

Mit Franzischen Schriften.

Bayerische Staatsbibliothek München

Berichtigungen.

Seite	Linie	statt	lies
8	12	einer solchen Ord- nung	einer solchen Größe der ersten Ordnung
9	11	: ∞	X a
21	16	um 900	nun 900
19	1	$x^2 (xv - yz)$	$x^2 d (xv - yz)$
29	4	$\frac{3mz}{a} - \frac{3my^2}{a^2}$,	$\frac{3mz}{a} - \frac{3mz^2}{2a^2} - \frac{3mz^3}{3a^2}$ + $\frac{3mz^3}{a^3}$ &c.
			$- \frac{3mz^4}{4a^2} - \frac{3mz^5}{5a^5}$ ...
42	6	seine Abscisse	ihre Abscisse
43	25	Subtangente	Subnormal
64	17	a	p
95	26 : 2	$\frac{c^2}{2} : \frac{a^2}{2}$ = &c.	: 4 $\frac{c^2}{4} : \frac{a^2}{4}$ = &c.
105	15	Fig. 31	Fig. 32
110	9	32	34

Fig. 2.

Fig. 3.

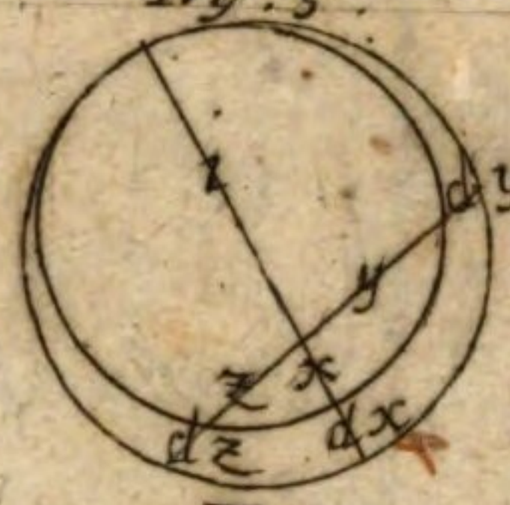


Fig. 6.

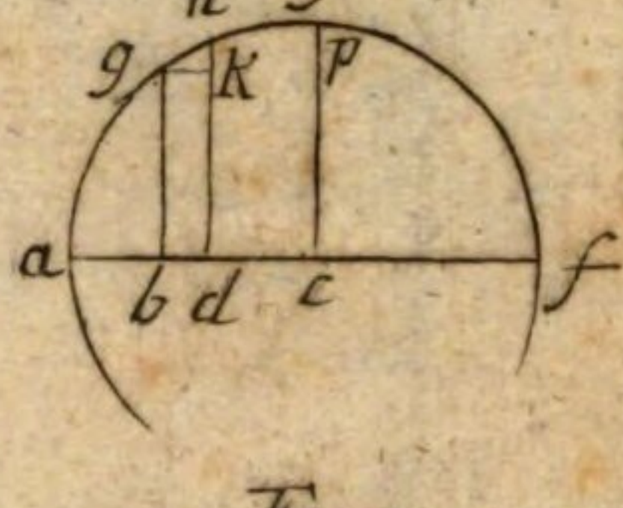


Fig. 9.

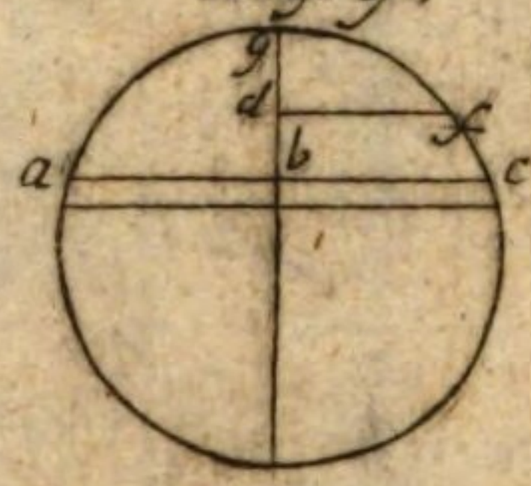


Fig. 12.

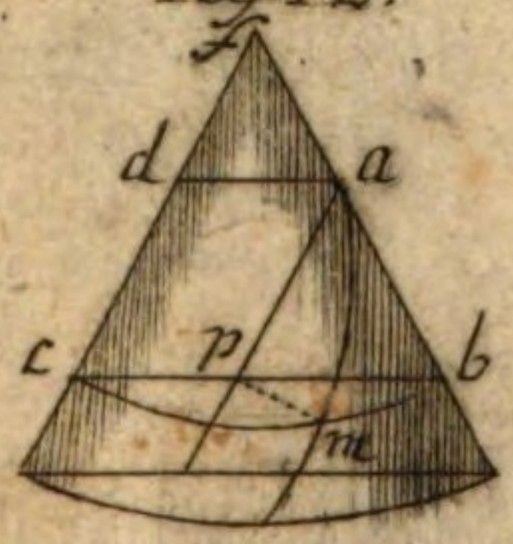


Fig. 15.

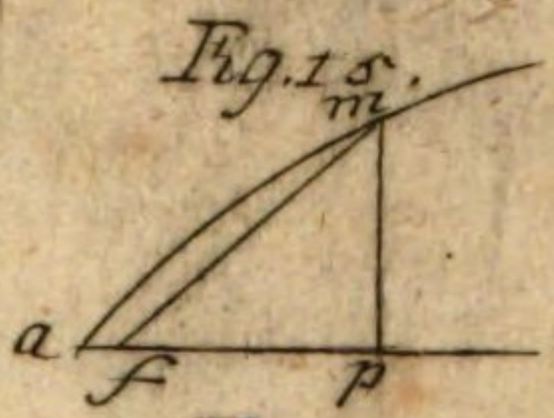


Fig. 18.

Fig. 20

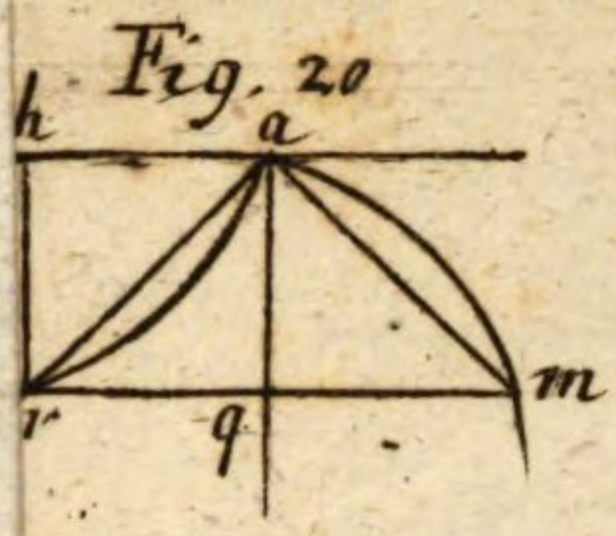


Fig. 21.

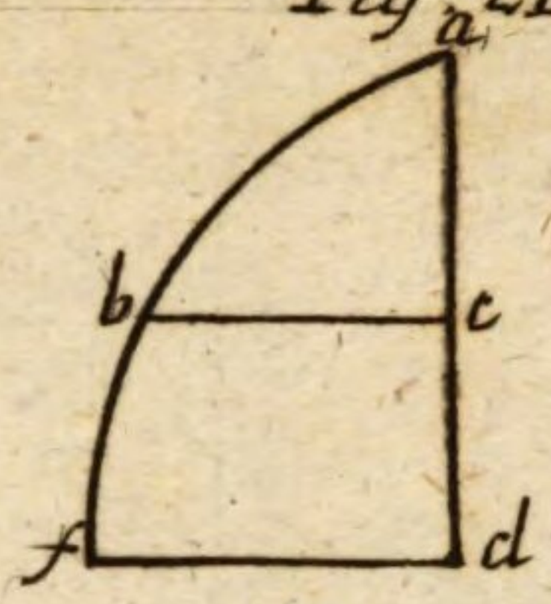


Fig. 23.

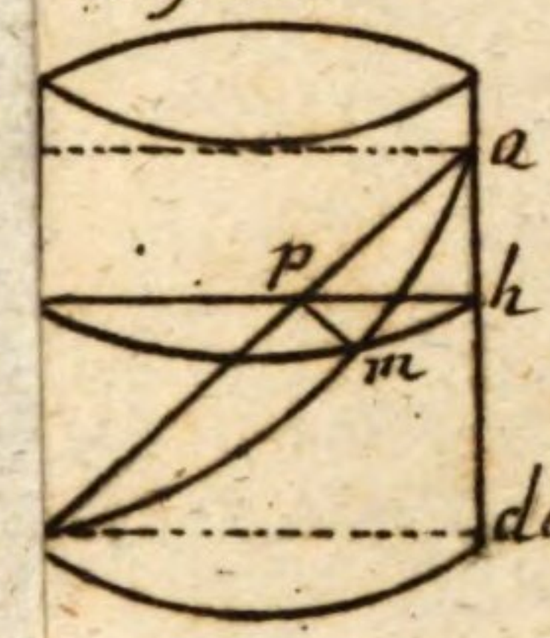


Fig. 24.

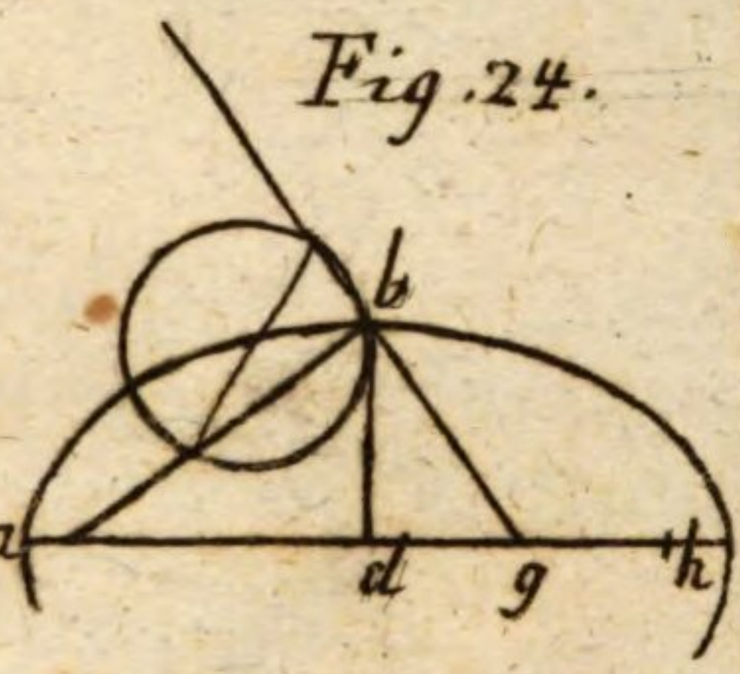


Fig. 26.

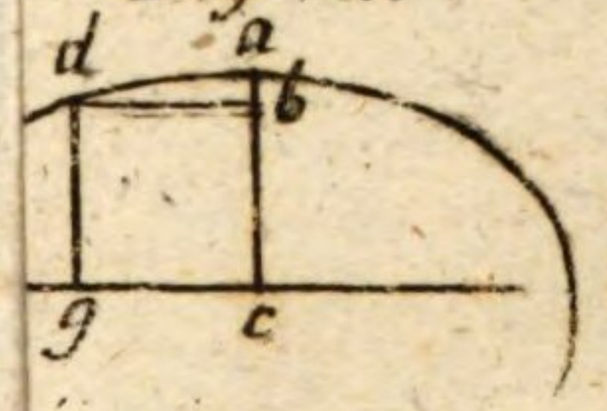


Fig. 27.

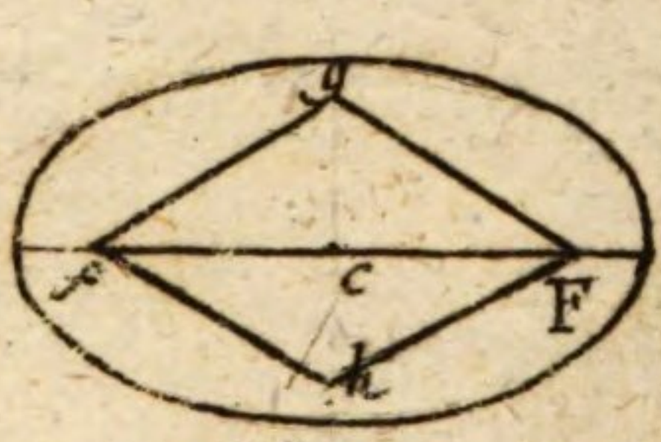


Fig. 29

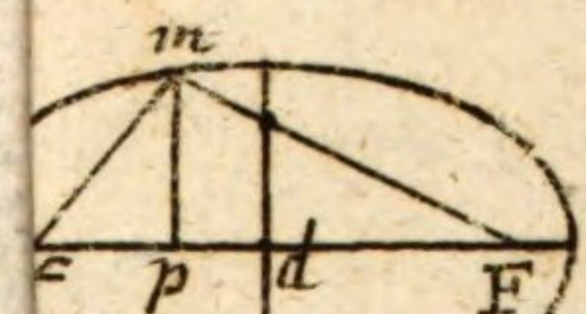


Fig. 30.

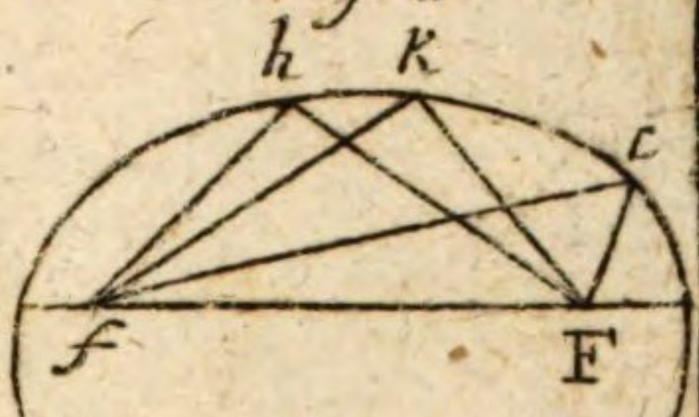


Fig 31.

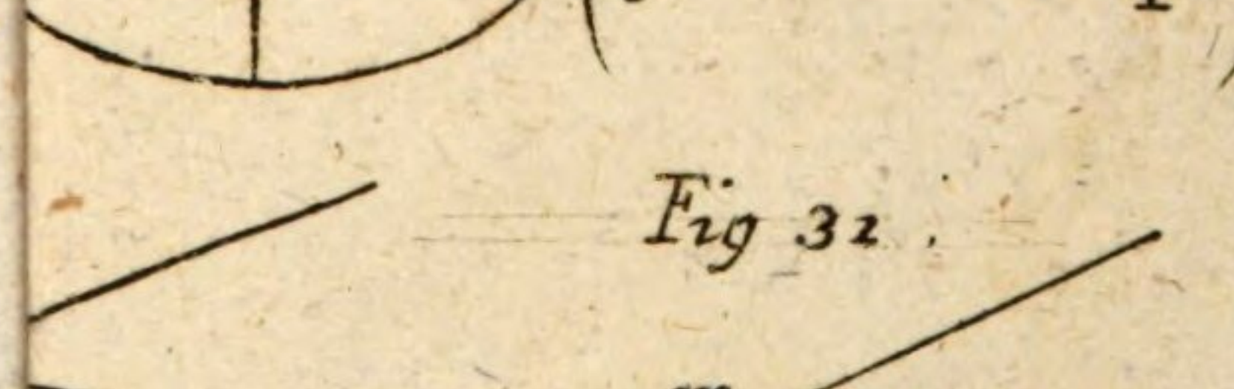


Fig. 34.

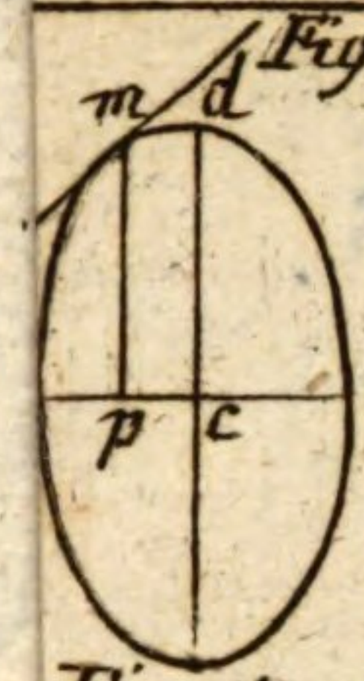


Fig. 35

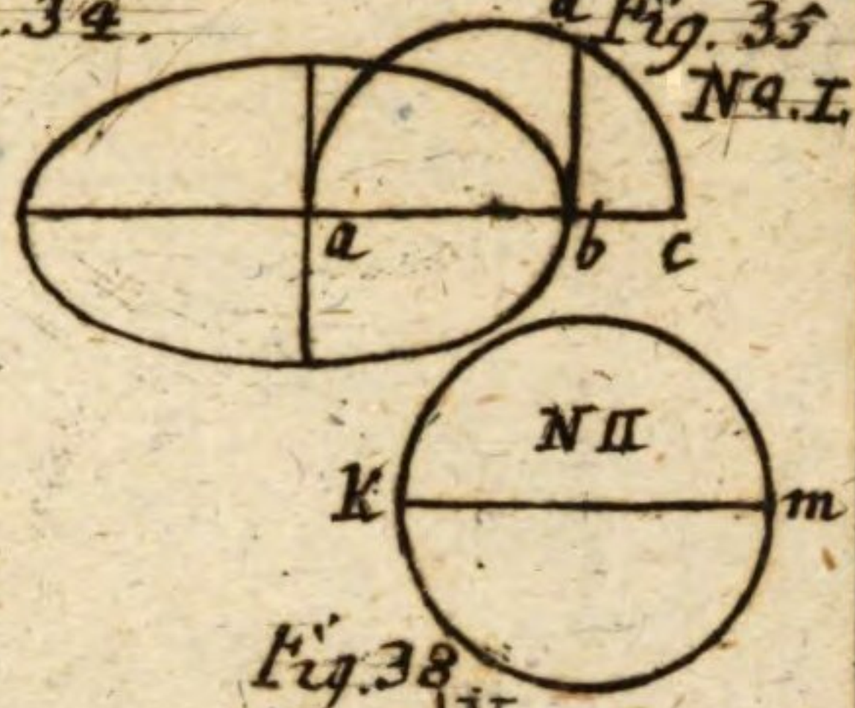


Fig. 37.

Fig. 38

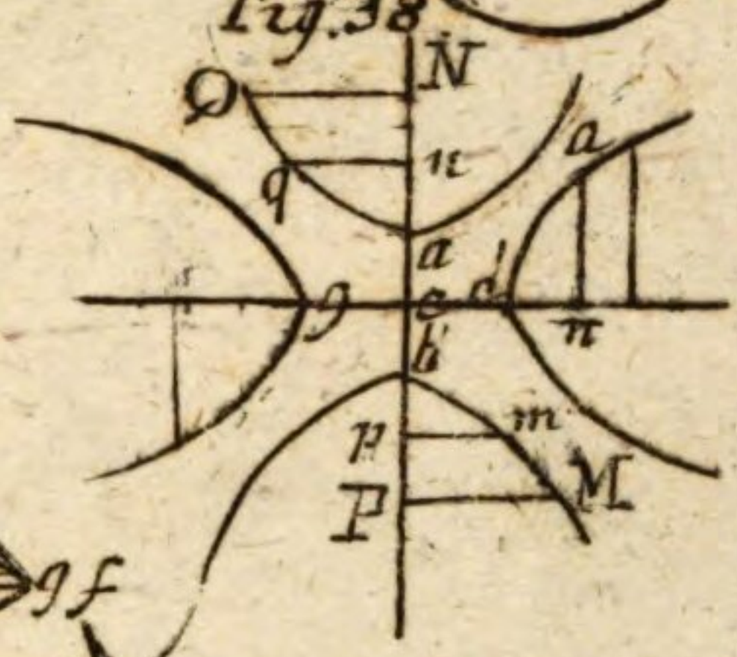


Fig. 40.

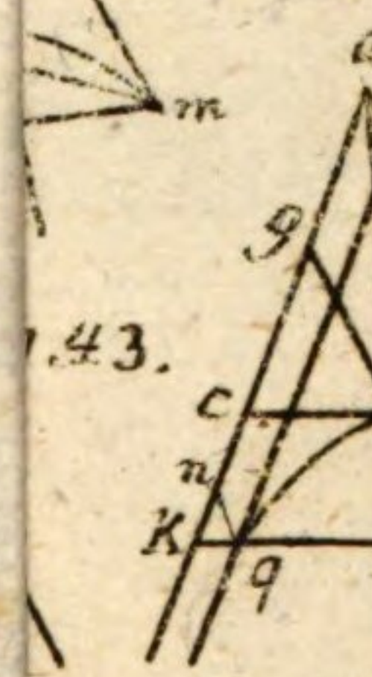


Fig. 41.

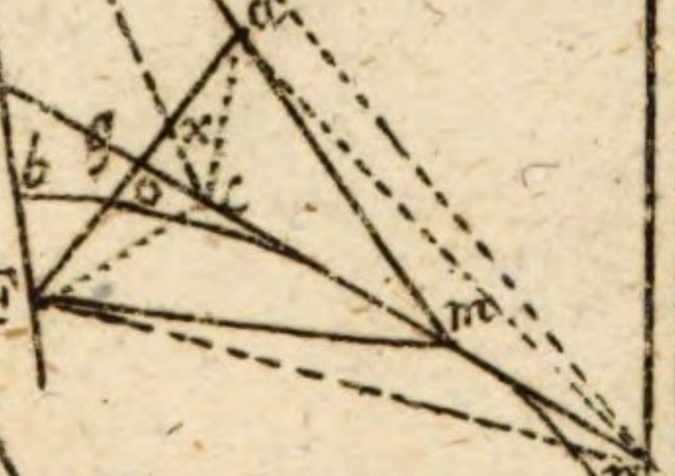


Fig. 43.

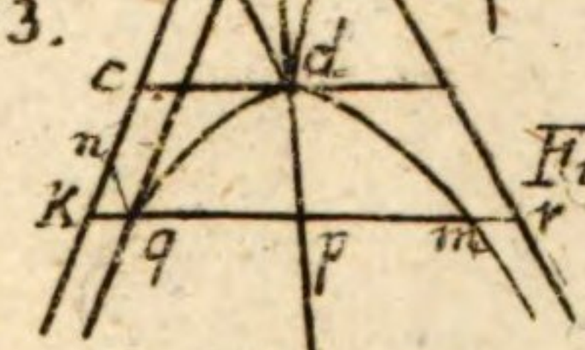


Fig. 44.

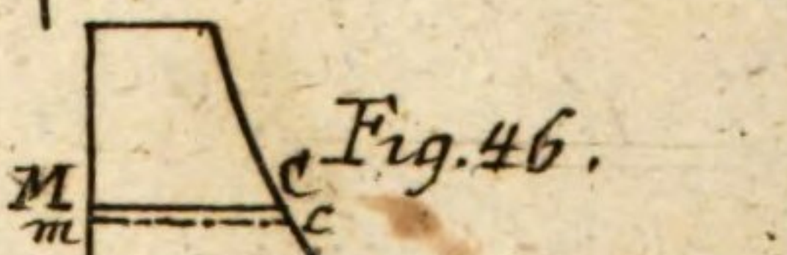


Fig. 46.

b Fig. 2.

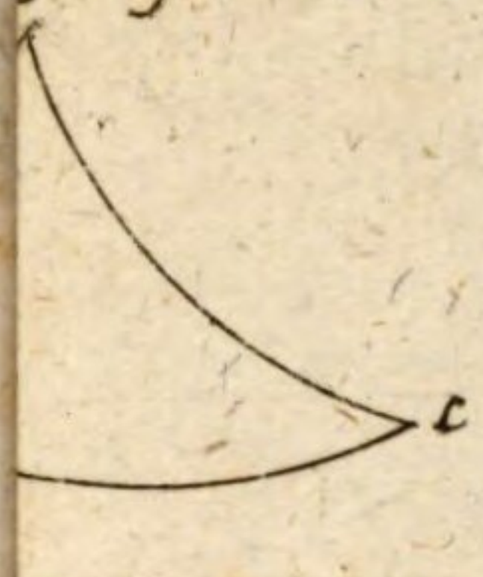


Fig. 3.

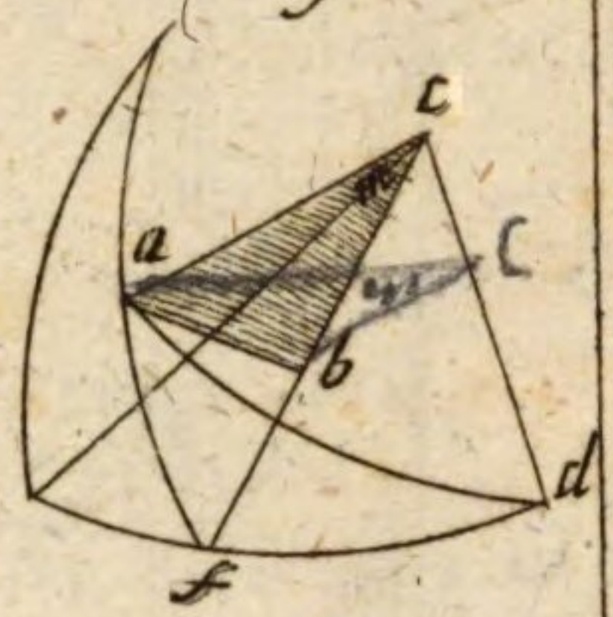
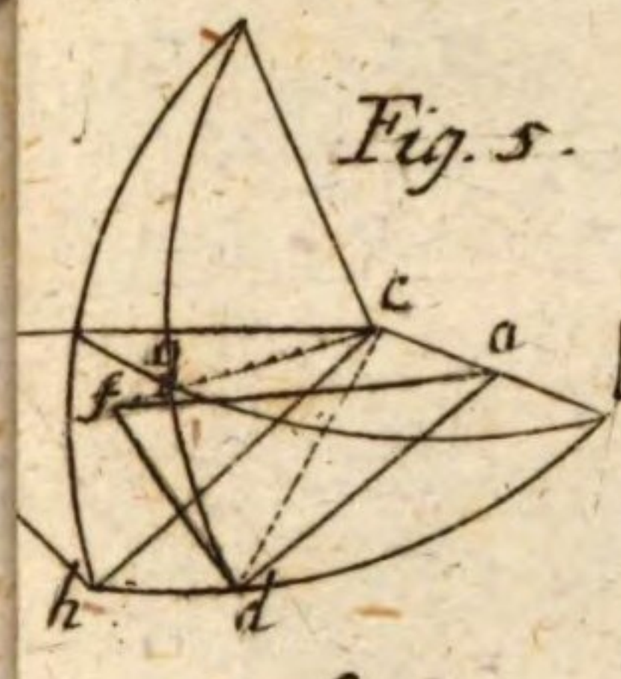


Fig. 5.



b Fig. 6.

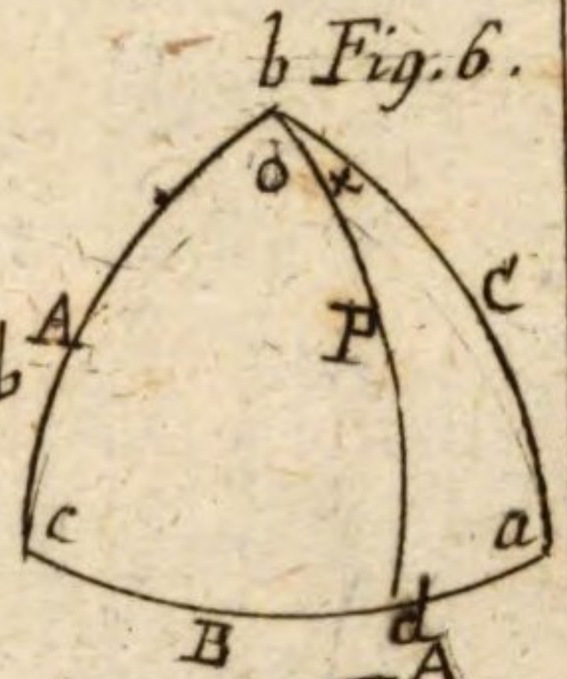


Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 11

Fig. 12.

23.

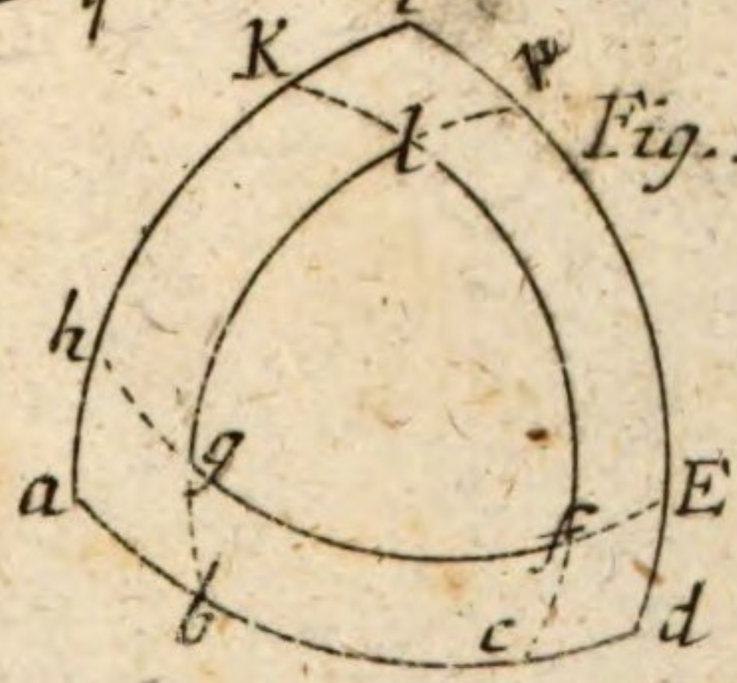


Fig. 14.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Prändel, Johann Georg,

Johann Georg Prändels öffentlichen Repetitors der Mathematik auf dem churfü rstl. Schulhause zu München Geometrie und ebene Trigonometrie nebst ihrer Ausübung auf dem Felde

München 1793

Math.p. 439
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082608-2
VD18 13128108-002